

Samenvatting Newtoniaanse Kosmologie

Prof. dr. Abraham Achterberg
Afdeling Sterrenkunde, IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
April 2015

Inhoudsopgave

1	Inleiding en historie	11
1.1	Wat is het Oerknalmodel, en waarom moet je dit model serieus nemen?	11
1.2	Een kwestie van de juiste schaal	13
1.3	Curtis en Shapley: <i>The Great Debate</i>	17
1.4	Hubble en zijn wet	19
1.5	Roodverschuiving, Doppler en de vluchtsnelheid	23
2	Einstein, Friedmann en de Relativiteitstheorie	31
2.1	Friedmann en zijn modellen	32
2.2	De schaalfactor en de wet van Hubble	32
2.3	De Hubble parameter H	34
2.4	Friedmann's vergelijking	41
2.5	Nogmaals de roodverschuiving	54
3	Materie en straling in een uitdijend heelal	57
3.1	Verdunning en afkoeling	57
3.2	Thermisch evenwicht en de stalingstemperatuur	61
3.3	Thermisch stralingsgas	62
3.4	Kosmische afkoeling	62
3.5	Een beetje thermodynamica	68
4	Friedmann modellen	71
4.1	Algemene vorm van Friedmann's vergelijking	71
4.2	Vlakke heelalmodellen: $k = 0$	72
4.3	De Hubble parameter en de leeftijd van het heelal	75
4.4	De kritische dichtheid	79
4.5	Het De Sitter heelal	80
4.6	Het vlakke Friedmann-Lemaître heelal	83
4.7	De stralingsfase van ons heelal	87

5	Heelalmodellen met kromming: $k \neq 0$	91
5.1	Inleiding	91
5.2	Gedrag van de oplossingen	92
5.3	Samenvatting	98
6	De samenstelling van ons heelal	99
6.1	Een inventarisatie	99
7	Licht, meebewegende coördinaten en de horizon	107
7.1	De voortplanting van licht in een expanderend heelal	107
7.2	Kosmische tijdsdilatie	110
7.3	Flux en helderheid van een verre bron	110
7.4	De horizonafstand	112
8	De grote-schaal structuur van het heelal	115
8.1	Het ontstaan van structuur	115
8.2	Jeans lengte en Jeans massa	117
8.2.1	Het gedrag van de Jeans lengte en de Jeans massa	122
8.2.2	Foton-wrijving	125
8.3	Na het eerste begin...	128
9	Successen en problemen van het Oerknalmodel	131
9.1	De successen: een recapitulatie	131
9.2	De problemen	131
9.2.1	Het horizonprobleem	132
9.2.2	Het vlakheidsprobleem	136
9.2.3	Het samenstellingsprobleem	139
10	Inflatie: één oplossing voor twee problemen	141
10.1	De oplossing van het vlakheidsprobleem	141
10.2	Oplossing van het horizonprobleem	143
10.3	Gevanceerd onderwerp: wat veroorzaakt inflatie?	147
11	Het vroege heelal	149
11.1	Expansiewet, temperatuur en dichtheid	149
11.2	Koppeling en ont koppeling	150
11.3	Interactielengte en de werkzame doorsnede	151
11.3.1	Een voorbeeld: kosmische neutrino's	152
11.4	En na de ont koppeling? Bevriezing!	153

11.4.1 Het algemene geval	154
11.5 De belangrijkste fasen in het vroege heelal	157

Hoofdstuk 1

Inleiding en historie

1.1 Wat is het Oerknalmodel, en waarom moet je dit model serieus nemen?

Sterrenkundigen geloven dat ons heelal op voldoende grote schaal (d.w.z. op een schaal van miljoenen-miljarden lichtjaren) uitzet. De waarnemingen vertellen ons dit, en dan met name de *wet van Hubble*, die zegt dat verre sterrenstelsels (of groepen van sterrenstelsels) zich van ons af lijken te bewegen met een snelheid V evenredig met hun afstand D :

$$V = H_0 D .$$

De evenredigheidsconstante H_0 is de *Hubble constante*, één van de fundamentele grootheden uit de kosmologie. De expansie van het heelal valt op te maken uit de *roodverschuiving*: het licht dat wij ontvangen van deze verre sterrenstelsels verschoven is naar het lang-golvige (rode) deel van het spectrum. De conclusie is:

- **Het heelal dijt op grote schaal uit.**

In Hoofdstuk 3 zullen we zien dat er van een beweging in de strikte zin des woords géén sprake is: volgens de Algemene Relativiteitstheorie is het de ruimte zelf die uitzet. Tussen ons en een willekeurig, voldoende ver weg staand sterrenstelsel wordt simpelweg ruimte bijgemaakt. Daardoor neemt de afstand tot het sterrenstelsel toe.

Als men accepteert dat er in het heelal voortdurend ruimte wordt bijgemaakt heeft dat een belangrijke consequentie. Materie en straling in het heelal krijgen steeds meer ruimte beschikbaar, en verdelen zich dus over een steeds groter volume. Daardoor nemen de massadichtheid en de stralingsdichtheid af.

De natuurkunde van ijle gassen vertelt ons dat deze verdunning noodzakelijkerwijs leidt tot een temperatuursdaling van het gas.

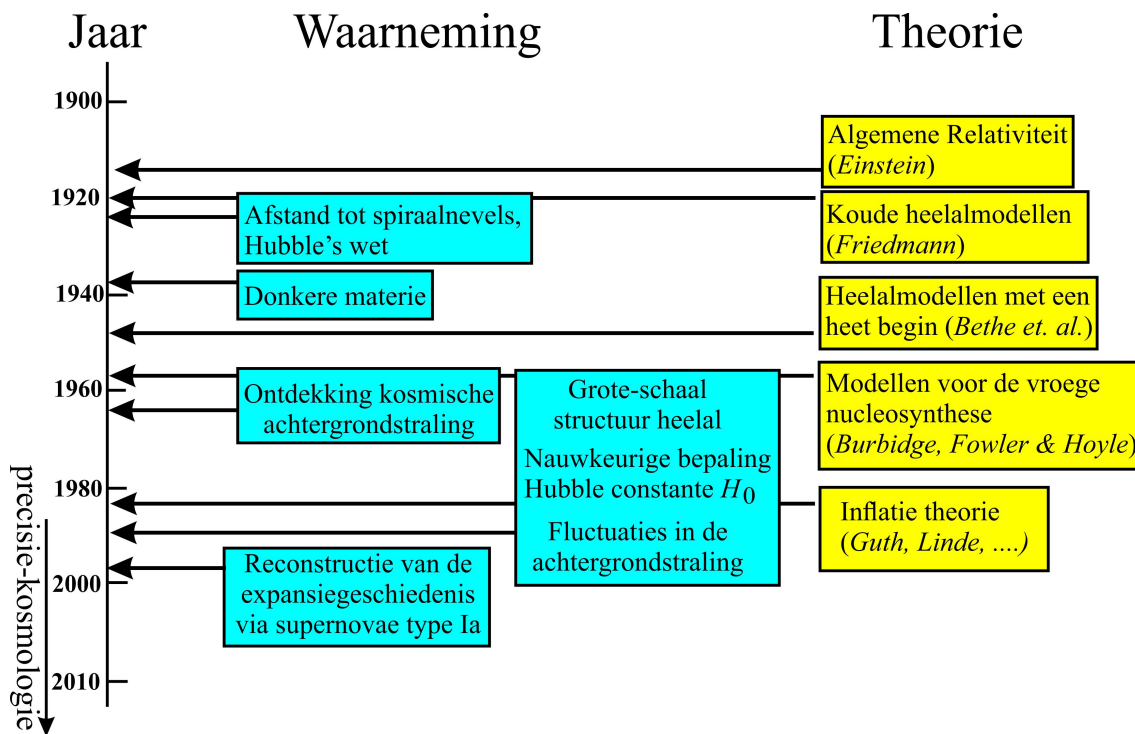
Hetzelfde blijkt te gelden voor straling, simpelweg omdat de roodverschuiving de energie van ieder foton doet afnemen. De conclusie luidt:

- **Het heelal wordt ijler en kouder naarmate het verder en verder uitzet.**

Deze tweede conclusie kan men direct experimenteel staven. Het betekent namelijk dat ons heelal in het verleden een grotere dichtheid kende, en de materie in het heelal veel heter was. Het heelal kende dus zo'n 14 miljard jaar geleden een **dichte en hete Oerknal!** De waarnemingen leveren twee duidelijke aanwijzingen voor de realiteit van dit idee:

1. We zien het 'nagloeien' van de het Oerknal in de vorm van de **kosmische achtergrondstraling**, in 1964 ontdekt door Penzias en Wilson. We zullen later zien dat deze straling werd gecreëerd toen het heelal doorzichtig werd voor straling, bij een leeftijd van ongeveer 300,000 jaar oud was, bij een temperatuur van zowat 3,500 K.
2. We zien materiaal (ijl gas) dat nooit in sterren heeft gezeten, en toch sporen van Helium en wat zwaardere elementen bevat. Dit is het gevolg van een korte, ongeveer tien minuten durende fase van kernverbranding in het vroege heelal. Dit noemt men de **voorwereldlijke nucleosynthese**. Die fase is alleen mogelijk als de dichtheid en temperatuur hoog genoeg waren, en vergelijkbaar met dichtheid en temperatuur in de kern van onze Zon.

De wet van Hubble, de kosmische achtergrondstraling en de voorwereldlijke nucleosynthese vormen de drie pijlers onder het Oerknalmodel. Het model is zowel theoretisch als observationeel ondersteund, zie het schema van figuur 1.1.



Figuur 1.1: Een schema met de tijdslijn van de belangrijkste ontwikkelingen in de moderne kosmologie. Vanaf ruwweg 1985 worden de metingen zo nauwkeurig dat men kan spreken van 'precisie-kosmologie'. Alle in dit schema genoemde onderwerpen komen in het vervolg aan bod.

1.2 Een kwestie van de juiste schaal

Aan het begin van de 20^e eeuw stonden sterrenkundigen voor een drietal fundamentele vragen, hier opgesomd in de volgorde waarop ze werden beantwoord¹:

1. Hoe groot is ons Melkwegstelsel;
2. Wat is de aard van spiraalnevels;
3. Wat doet sterren stralen?

De grootte van ons planetenstelsel was al in de 17^e eeuw bepaald (Cassini, 1672). De afstand tot de nabije sterren werd inmiddels gemeten met behulp van de methode van *parallax*², voor het eerst toegepast door Bessel in 1838. Die metingen lieten al zien welke enorme schalen er in het spel zijn.

¹Voor de volledigheid de antwoorden: [1] ~ 80.000 lichtjaar (Shapley, 1920), [2] het zijn sterrenstelsels (Hubble, 1924), [3] Kernfusie (Bethe, 1938).

²*Parallax* = verschilzicht, zie de figuur en **Kader 1** op de volgende pagina. Deze methode gebruikt het feit dat men een nabije ster aan de hemel iets verschoven ziet ten opzichte van veel verder weg staande objecten als men de ster twee maal waarneemt, de tweede waarneming zes maanden later als de Aarde zich op zijn baan aan de andere kant van de Zon bevindt. Deze methode is een vorm van driehoeksmeting, met de straal van de Aardbaan als basislijn.

Echter, de parallaxmethode werkte (met de toenmalige stand van de techniek) maar tot zo'n 100 lichtjaar³. Ons Melkwegstelsel was duidelijk veel groter: de meeste sterren toonden geen zichtbare verschuiving. Men moest daarom zijn toevlucht nemen tot een indirecte methode om de afstand tot verre sterren te schatten. De toen meest ingeburgerde methode gebruikt het verband tussen afstand en schijnbare helderheid: hoe verder een object weg staat, des te lichtzwakker lijkt het (zie **Kader 2**).

De Nederlandse sterrenkundige Jacobus Kapteijn gebruikte al sterhelderheden uit zijn stercatalogus om de afstanden tot sterren te schatten. Kapteijn's doel was om de afmeting en vorm van het Melkwegstelsel te bepalen: hij kwam uit op een platte schijf met een diameter van ongeveer 50.000 lichtjaar, met de Zon min of meer in het centrum van de schijf.

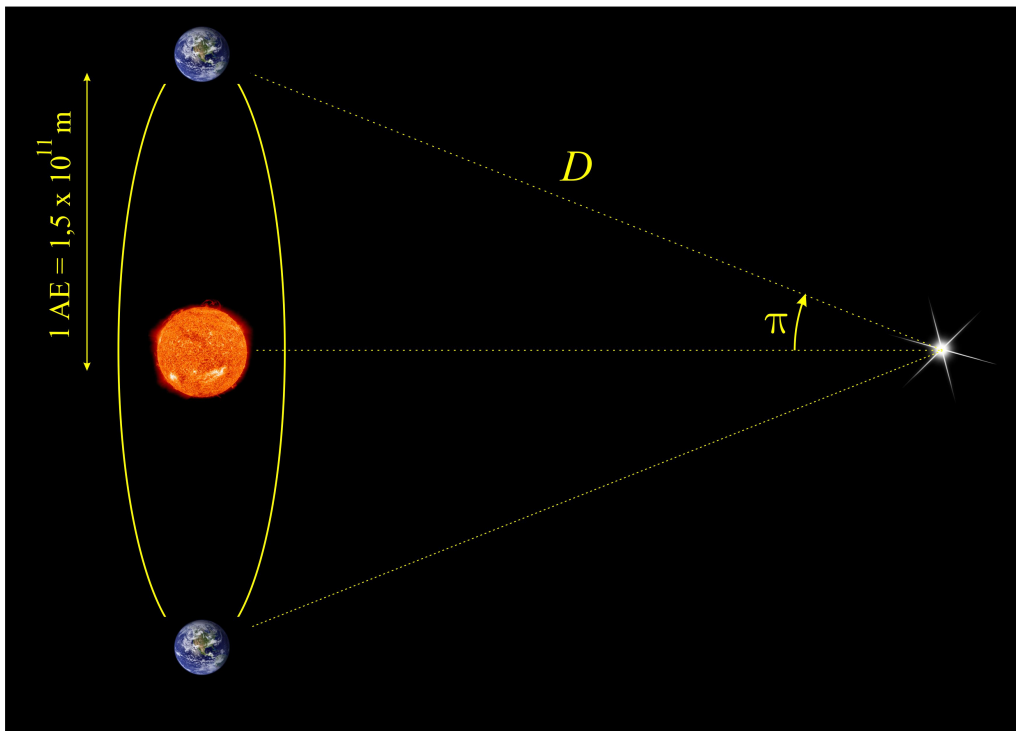
De helderheidsmethode heeft echter nadelen: de sterpopulatie in het Melkwegstelsel is zeer divers, met intrinsiek zeer heldere maar ook zeer lichtzwakke sterren. Men moet dus weten naar welk type ster men kijkt! Bovendien heeft men een ijkmeting nodig: in dit geval de helderheid van een ster van bepaald type op een *bekende* (gewoonlijk via parallax verkregen) afstand. Een extra complicatie is het feit dat het Melkwegstelsel grote hoeveelheden stof bevat dat sterlicht absorbeert.

Dat interstellair stof heeft een tweetal gevolgen als men de helderheidsmethode gebruikt om de afstanden tot sterren tracht te bepalen:

1. men overschat de afstand door het ontbrekende (door het stof weggevangen) licht;
2. zeer lichtzwakke sterren op grote afstand zijn helemaal niet zichtbaar, simpelweg omdat iedere telescoop een beperkte gevoeligheid heeft.

De algemene stelregel is: hoe groter de telescoop, des te gevoeliger hij is. Daarom worden er ook nu nog steeds grotere telescopen ontworpen en gebouwd.

³1 lichtjaar = 9.46×10^{15} m.



Figuur 1.2: De definitie van de parallax π van een verre ster gezien vanaf de aarde.

Kader 1: Parallax en parsec

De oudste sterrenkundige afstandsbevestigingen berusten op driehoeksmeting. Zo kan men de afstand tot een niet al te ver weg staande ster schatten door het verschilzicht vanaf twee punten, diametraal tegenover elkaar gelegen op de baan van de Aarde rond de Zon: zie figuur 1.2. Uit de figuur volgt met eenvoudige driehoeksmetkunde dat de parallaxhoek π , de afstand D tot de sterren de straal van de Aardbaan (1 Astronomische Eenheid, AE) samenhangen volgens

$$D = \frac{1 \text{ AE}}{\tan \pi} \approx \frac{1 \text{ AE}}{\pi} .$$

De tweede gelijkheid geldt voor voldoende kleine hoeken. De **parsec** correspondeert met de afstand waarvoor $\pi = 1$ boogseconde = $4,85 \times 10^{-6}$ radiaal:

$$1 \text{ pc} = \frac{1,5 \times 10^{11} \text{ m}}{4,85 \times 10^{-6}} \approx 3,09 \times 10^{16} \text{ m} .$$

Sterrenkundigen gebruiken vaak het lichtjaar, de afstand die het licht in één jaar aflegt: $1 \text{ lichtjaar} = 9,46 \times 10^{15} \text{ m}$. Daaruit volgt:

$$1 \text{ pc} = 3,26 \text{ lichtjaar} .$$

Kader 2: helderheid, flux en magnitude

Bekijk een ster met *lichtkracht* L : het door de ster in de vorm van licht uitgezonden vermogen in Watt. Bijvoorbeeld: de lichtkracht van de Zon is 3.86×10^{26} W. Op een afstand D van de ster is de *flux* F , het vermogen per oppervlakte-eenheid, gelijk aan

$$F = \frac{L}{4\pi D^2} \quad [\text{W/m}^2]. \quad (1.2.1)$$

Dit is de lichtkracht van de ster, verdeeld over een bol met oppervlak $4\pi D^2$ met de ster in het middelpunt. De flux bepaalt hoe helder men een ster ziet. Zij correspondeert fysisch met het hoeveelheid lichtenergie die per seconde en per vierkante meter een oppervlak loodrecht op de gezichtslijn naar de ster passeert.

Sterrenkundigen gebruiken om historische redenen een logaritmische schaal voor de waargenomen helderheid, de schijnbare *magnitude* m . Deze schijnbare magnitude is gelijk aan

$$m = -2,5 \log F + \text{constante}. \quad (1.2.2)$$

De constante is zo bepaald dat de ster Vega in de sterrebeeld de Lier een schijnbare magnitude $m_{\text{Vega}} = 0$ heeft. De schijnbare magnitude wordt zo genoemd omdat de waargenomen helderheid afhangt van de afstand tot de ster: hoe verder weg de ster staat, des te groter is zijn schijnbare magnitude. Dat is een wat contra-intuïtieve eigenschap die nog wel eens voor verwarring zorgt: heel heldere sterren hebben een negatieve magnitude m !

Voor afstandsbepalingen via de helderheidsmethode is het volgende van belang: twee sterren (ster 1 en ster 2), met een identieke lichtkracht L , respectievelijk op een afstand D_1 en D_2 , hebben volgens (1.2.1) een magnitudeverschil gelijk aan

$$\Delta m \equiv m_2 - m_1 = -2,5 \log \left(\frac{F_2}{F_1} \right) = 5 \log \left(\frac{D_2}{D_1} \right). \quad (1.2.3)$$

Een meting van Δm voor sterren met gelijke lichtkracht levert dus de afstandsverhouding op. Als één van de twee afstanden bekend is volgt de andere afstand meteen.

Naast de schijnbare magnitude m gebruiken sterrenkundigen nog de *absolute magnitude* M , de magnitude van een ster zoals die zou zijn een vaste afstand van 10 parsec. De absolute magnitude is dus een maat voor de intrinsieke lichtkracht van de ster. Eén parsec (symbool: pc) correspondeert met een afstand van $3.086 \times 10^{16} \text{ m} \approx 3$ lichtjaar. Het is de afstand waarop een hypothetische ster - vanaf de aarde gezien - een parallax van één boogseconde heeft. Verschillen in absolute magnitude M zijn dus een maat voor de verhouding van de lichtkracht van twee sterren:

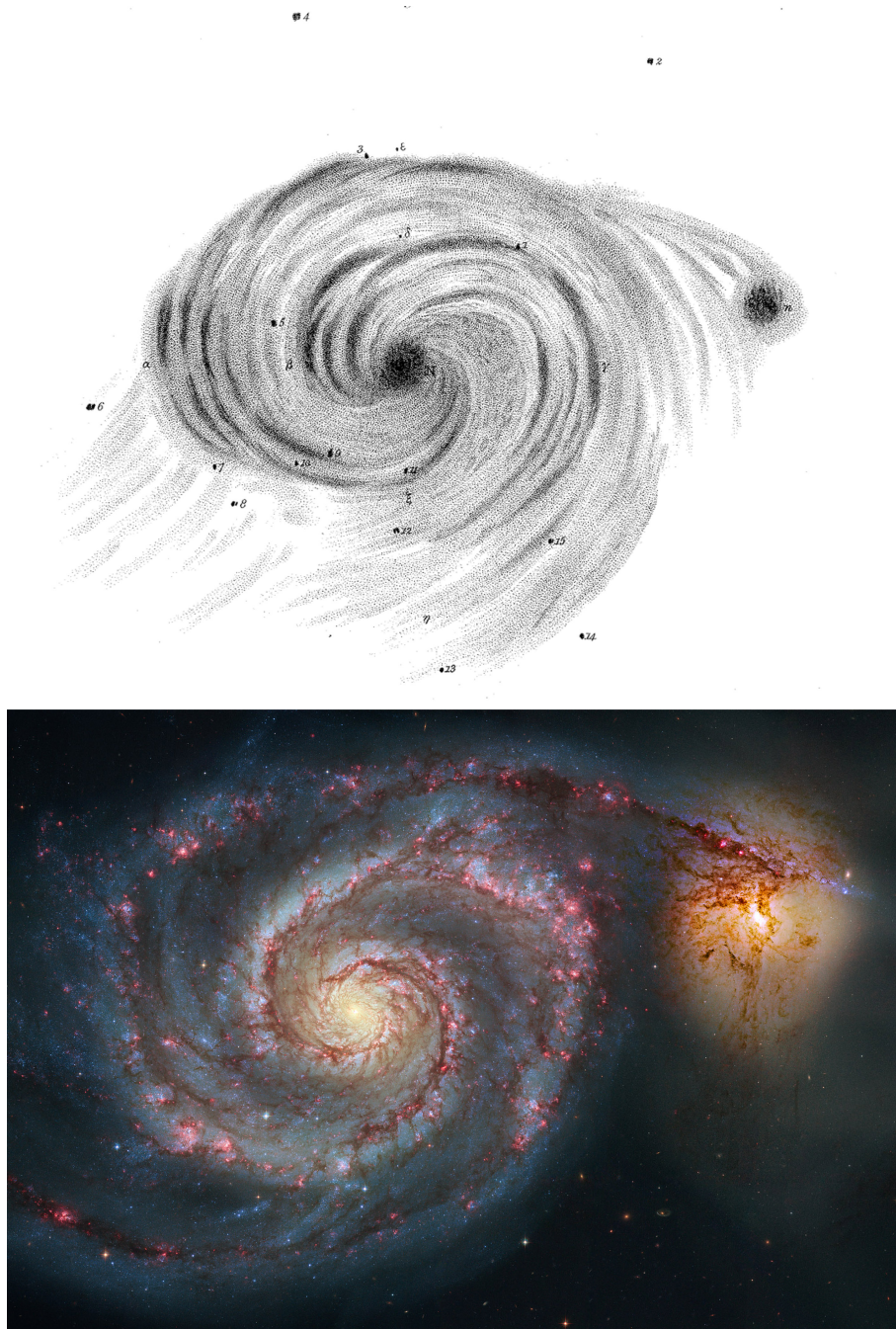
$$\Delta M \equiv M_2 - M_1 = -2,5 \log \left(\frac{L_2}{L_1} \right). \quad (1.2.4)$$

1.3 Curtis en Shapley: *The Great Debate*

In 1920, tijdens een bijeenkomst van de *National Academy of Sciences* in Washington, vond een debat plaats over de eerste twee van de drie bovengenoemde vragen, en meer in het algemeen over de grootte en bouw van het heelal. Twee verschillende standpunten werden verdedigd:

- Shapley geloofde dat het heelal bestaat uit een enkel sterrenstelsel, ons Melkwegstelsel. De spiraalnevels waren in zijn visie als satellieten deel van het Melkwegstelsel. Shapley stelde ook (om die reden, maar ook op grond van metingen aan bolhopen) dat het Melkwegstelsel veel groter is dan tot dan toe gedacht, zoals bijvoorbeeld door Kapteijn, en dat de Zon zich niet in het middelpunt van het Melkwegstelsel bevindt.
- Curtis zag ons Melkwegstelsel als één van vele sterrenstelsels, en stelde dat de spiraalnevels andere sterrenstelsels zijn. Dat idee was overigens niet van hem, maar al in 1755 geopperd door Immanuel Kant. Dat standpunt betekende automatisch dat ons heelal aanzienlijk groter moet zijn dan het Melkwegstelsel: de spiraalnevels zijn voor ons immers zichtbaar als kleine nevelvlekjes aan de hemel⁴, en staan dus ver weg. Met name de aard van, en afstand tot van de fraaie spiraalnevels, waarvan de structuur voor het eerst gezien was door William Parsons (figuur 1.3), was onderwerp van discussie

⁴Een van de meest nabije sterrenstelsels is de (met het blote oog zichtbare) Andromeda Nevel (M31). Deze nevel is aan de hemel ongeveer $2\frac{1}{2}$ maal groter dan de volle Maan.



Figuur 1.3: De bovenste figuur toont een schets van William Parsons van het spiraalstelsel M51, de Draaikolknevel, gemaakt aan de hand van zijn waarnemingen met de Leviathan of Parsonstown. De figuur daaronder is een moderne opname, gemaakt met de Hubble Space Telescope.

Vele sterrenkundigen in die tijd hadden er juist om die reden moeite mee om het standpunt van Curtis te accepteren: zijn zienswijze betekende zeer grote afstanden tot zelfs de meest nabije spiraalnevels. Zijn tijdgenoten konden zich daar nauwelijks een voorstelling van maken.

Bijvoorbeeld: de afmeting van de Andromedanevel (zie figuur 1.4) aan de hemel is ongeveer 2,5 graden $\approx 0,04$ radiaal. Is de lineaire afmeting (diameter) van de Andromedanevel gelijk aan d , dan moet de afstand ongeveer gelijk zijn aan $D_{\text{Andr}} = d/0,04 \approx 25 d$. Als men dan Shapley's schatting voor de afmeting van de Melkweg gebruikt (~ 100.000 lichtjaar) als een schatting voor de afmeting van de Andromedanevel komt men uit op een afstand van ongeveer 2,5 miljoen lichtjaar, vrijwel de correcte waarde.

Uiteindelijk kende het debat géén duidelijke winnaar: nog geen vijf jaar later toonde Edwin Hubble aan dat Curtis gelijk had waar het de spiraalnevels betreft: het zijn sterrenstelsels. Maar Shapley's schatting van de afmeting en vorm van ons Melkwegstelsel was dicht bij de waarheid.

1.4 Hubble en zijn wet

Edwin Hubble kreeg als een van de eersten de kans te werken met de in de periode 1917-1948 grootste teleskoop ter wereld: de 100 inch *Hooker Teleskoop* op Mount Wilson, ten noorden van Los Angeles. Deze teleskoop (figuur 1.5) vangt het licht met een spiegel van ongeveer $2\frac{1}{2}$ meter doorsnede. Met deze telescoop was Hubble als eerste in staat om afzonderlijke sterren te zien in een aantal spiraalnevels, zoals de Andromedanevel. Die simpele waarneming besliste in één klap de discussie over de aard van de spiraalnevels: Curtis had gelijk.

Het feit dat nu afzonderlijke sterren konden worden gezien stelde Hubble in staat om de helderheidsmethode te gebruiken om de afstand tot de Andromedanevel (en andere nabije sterrenstelsels) te bepalen. De parallax-methode werkt op deze afstand niet⁵. Hubble gebruikte daarom een andere methode: hij ging op zoek naar een klasse veranderlijke sterren de *Cepheïden*. Dit zijn pulserende sterren die door de pulsatie regelmatig van helderheid wisselen. Van Cepheïden was bekend⁶ dat de periode P van hun regelmatige helderheidswisselingen samenhangt met hun lichtkracht. Die relatie is, uitgedrukt in de absolute magnitude, een maat voor de lichtkracht:

$$M \approx -2.7 \{ \log[P(\text{in dagen})] - 1 \} - 4.6 . \quad (1.4.5)$$

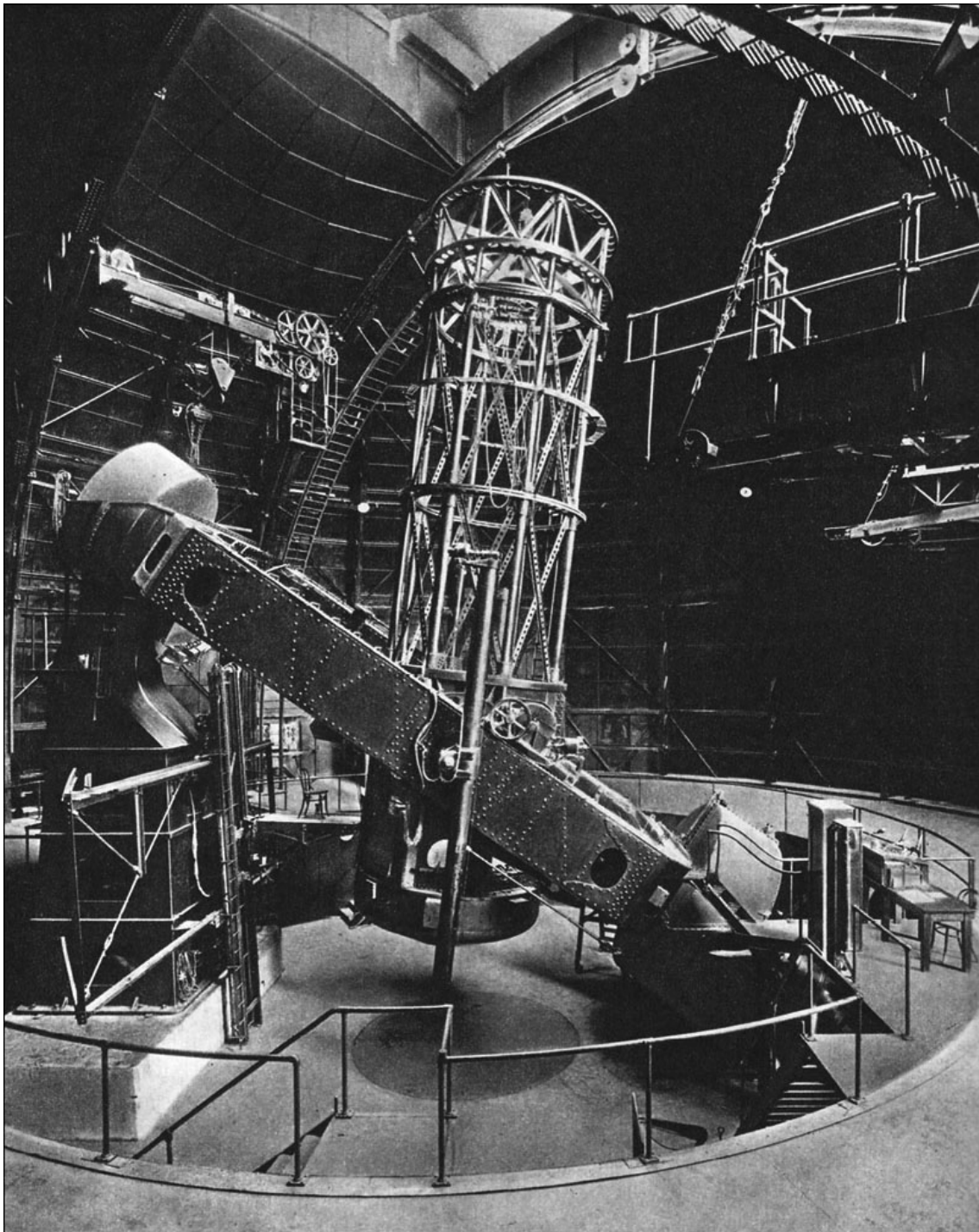
Als de periode P toeneemt is de ster intrinsiek helderder. Hubble zocht (en vond) Cepheïden in de Andromedanevel en mat hun schijnbare helderheid m en de periode P van hun helderheidswisselingen. Vervolgens vergeleek hij de helderheid met die van Cepheïden met een vergelijkbare periode in ons eigen Melkwegstelsel, waarvan de afstand al bekend was. Het magnitude-verschil levert dan de afstand tot de Andromedanevel, zie Figuur 1.6.

⁵De meest moderne parallaxmetingen worden gedaan met speciaal daarvoor ontworpen satellieten, en kunnen afstanden tot ~ 75.000 lichtjaar bepalen, een afstand vergelijkbaar met de diameter van ons Melkwegstelsel.

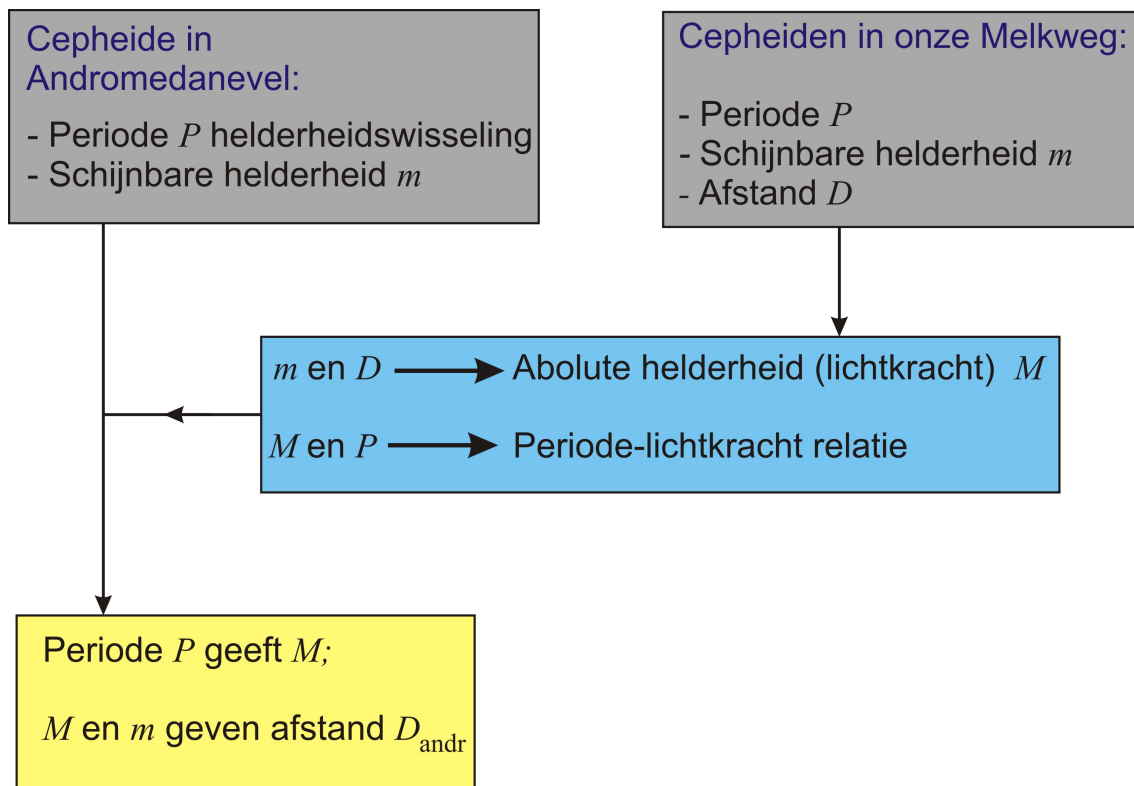
⁶Dit verband tussen de absolute helderheid en de periode van de helderheidswisselingen werd in 1908 ontdekt door Henrietta Swan-Leavitt, werkzaam aan het *Harvard Observatory* nabij Boston in de VS.



Figuur 1.4: Een foto van de Andromedanevel, gemaakt met een kleine amateur-telescoop



Figuur 1.5: De Hooker telescoop op Mount Wilson, ten noorden van Los Angeles. De spiegel van 100 inch zit aan de bodem van de telescoop. Boven in de telescoop leidt een kleine vangspiegel het opgevangen licht naar de waarnemer, die dus een wankel uitzierend trapje op moet beklimmen!



Figuur 1.6: De stappen die leiden tot de bepaling van de afstand tot de Andromedanevel D_{Andr} , zoals voor het eerst gedaan door Hubble.

1.5 Roodverschuiving, Doppler en de vluchtsnelheid

Al in 1914 ontdekte de Amerikaanse sterrenkundige Vesto Slipher de *roodverschuiving*: het licht van spiraalnevels kwam aan met een grotere golflengte dan verwacht. Dit kon worden vastgesteld aan de hand van de spectra van deze nevels: daarin zijn de absorptielijnen zichtbaar van elementen zoals waterstof, helium en zuurstof waarvan de golflengte in het laboratorium nauwkeurig kan worden bepaald. Deze spectraallijnen zijn zichtbaar als absorptielijnen wanneer een elektron in een atoom de energie van een foton (lichtdeeltje) wegvangt, en naar een hoger energieniveau springt, zie **Kader 3**.

Rond 1924 combineerde Hubble zijn afstandsbepalingen met metingen van de roodverschuiving. De mate van roodverschuiving wordt gewoonlijk voorgesteld met behulp van de parameter z die is gegeven door:

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{lab}}}{\lambda_{\text{lab}}} . \quad (1.5.6)$$

Hier is λ_{obs} de waargenomen golflengte van een absorptielijn, en λ_{lab} is de laboratoriumgolflengte, d.w.z. de golflengte zoals voorspeld met atoomtheorie. Deze kan in het laboratorium worden gemeten. Als de waargenomen golflengte groter is dan λ_{lab} is het licht roodverschoven. In het omgekeerde geval spreekt men van blauwverschuiving. Figuur 1.7 illustreert dit aan de hand van de eerste drie Balmerlijnen van waterstof. Zonder roodverschuiving ($z = 0$) vallen vier Balmerlijnen in het zichtbare deel van het spectrum. Bij de hier gekozen roodverschuiving van $z = 0.25$ schuiven drie absorptielijnen richting het rode deel van het spectrum, en valt de vierde Balmerlijn in het (niet getoonde, en voor ons onzichtbare) infrarood.

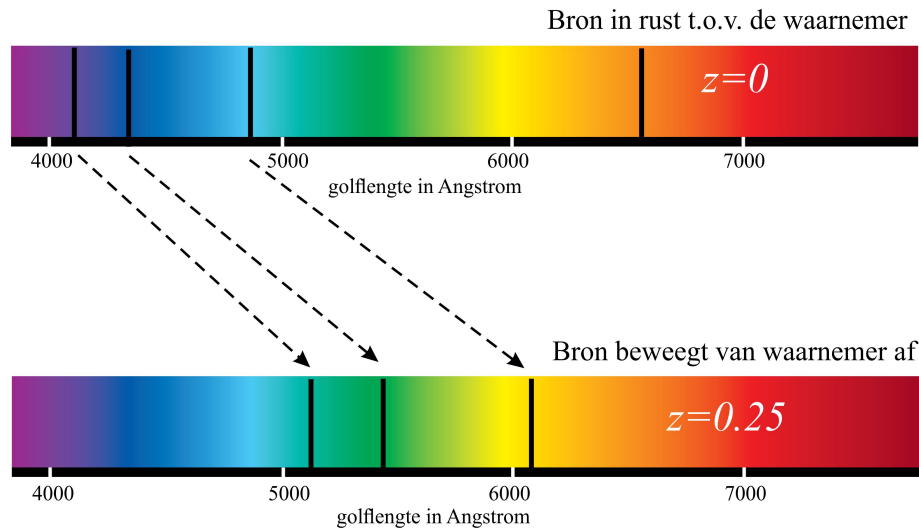
Hubble merkte op dat de roodverschuiving z evenredig is met de door hem bepaalde afstand D tot de spiraalnevels:

$$z = \text{constante} \times D . \quad (1.5.7)$$

Rood- en blauwverschuivingen worden routinematig in sterrenkundige spectra waargenomen. Zij worden met succes verklaard als het effect van de beweging van de bron: roodverschuiving bij een beweging van de waarnemer af, en blauwverschuiving bij een beweging naar de waarnemer toe.

Hubble interpreteerde zijn waarnemingen dan ook als een systematische beweging van verre sterrenstelsels van de waarnemer af. De theorie van het *Doppler-effect* (zie **Kader 5**) voorspelt dat, voor een *vluchtsnelheid* V veel kleiner dan de lichtsnelheid c , de roodverschuiving gelijk is aan:

$$z = \frac{V}{c} . \quad (1.5.8)$$



Figuur 1.7: Het effect van een roodverschuiving $z = 0.25$ op de positie van de eerste vier Balmerlijnen van waterstof. Getoond wordt het voor ons zichtbare deel van het spectrum. De figuur boven geeft de positie van de vier absorptielijnen zonder roodverschuiving ($z = 0$). De onderste figuur geeft het effect van een roodverschuiving $z = 0.25$. Alleen de eerste drie Balmerlijnen zijn dan nog zichtbaar. De vierde Balmerlijn ligt dan in het (voor ons) onzichtbare infrarode deel van het spectrum, bij een golflengte van $\sim 8200 \text{ \AA}$. Deze lijn is in de onderste figuur niet weergegeven.

Er van uitgaande dat het Doppler-effect de verklaring voor de roodverschuiving is levert combinatie van de laatste twee relaties op dat de vluchtsnelheid van verre sterrenstelsels evenredig is met de afstand D tot het stelsel:

$$V = H_0 D . \quad (1.5.9)$$

De evenredigheidsconstante in deze relatie wordt geschreven als H_0 , en wordt de *Hubble constante* genoemd. Relatie (1.5.9) is de *Wet van Hubble*⁷. We zullen later zien dat -strikt genomen- de Hubble constante helemaal niet constant is, en dat H_0 correspondeert met de huidige waarde.

Sterrenkundigen meten de Hubble constante in door de praktijk bepaalde eenheden, zie ook **Kader 4**. De typische afstand D tussen sterrenstelsels is een paar Megaparsec (1 Mpc = 10^6 pc), en de waargenomen vluchtsnelheid V voor de nabije sterrenstelsels is een paar honderd kilometer per seconde. Daarom is de ingeburgerde praktische eenheid voor de Hubble constante

$$[H_0] = \text{km/s per Mpc} . \quad (1.5.10)$$

⁷Historisch gezien is het de Belgische kosmoloog Georges Lemaître geweest die in 1927 voor het eerst een relatie van de vorm (1.5.9) heeft opgeschreven, uitgaande van Hubble's waarnemingen en de Algemene Relativiteitstheorie.

Kader 3: spectraallijnen

De quantummechanica voorspelt dat absorptie van fotonen door een atoom alleen bij heel specifieke golflengten plaatsvindt. Wint het elektron bij de absorptie een hoeveelheid energie ΔE , dan volgt de golflengte λ van de absorptie uit

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \iff \lambda = \frac{hc}{\Delta E}. \quad (1.5.11)$$

Hier is $h = 6,26 \times 10^{-34}$ J s de constante van Planck, en $\nu = c/\lambda$ is de frequentie van het foton.

We nemen het waterstofatoom als voorbeeld. De Bohr theorie voor het waterstofatoom voorspelt dat de energieniveaus van het enkele electron in het waterstofatoom gegeven zijn door^a

$$E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} \quad (\text{met } n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.5.12)$$

Het minteken geeft aan dat het een bindingsenergie is.

Men verwacht daarom bij een sprong van het ene naar het andere energieniveau $n \rightarrow n' > n$ absorptie op een golflengte^b

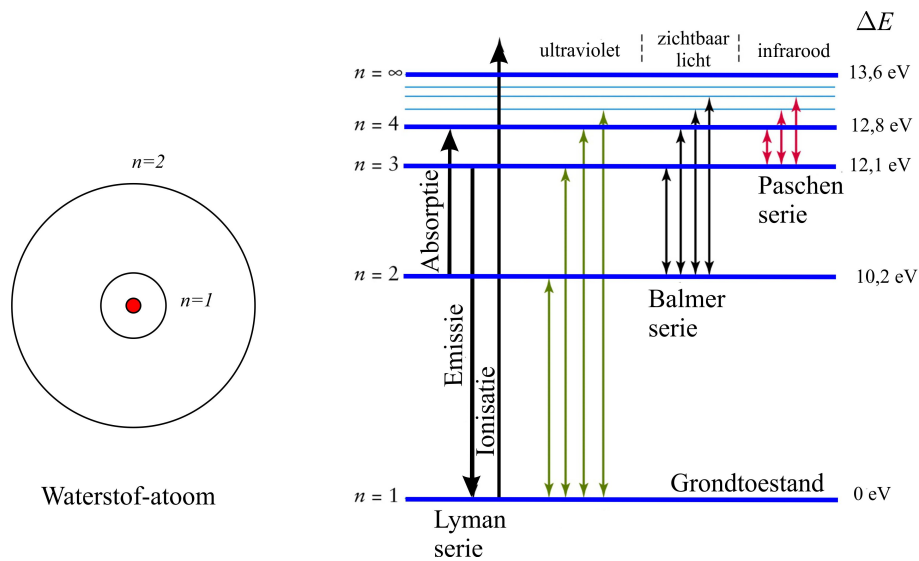
$$\lambda = 911,6 \text{ \AA} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n')^2} \right)^{-1}. \quad (1.5.13)$$

Een en ander is geïllustreerd in Figuur 1.8

Spektraallijnen kunnen zichtbaar zijn als *emissielijnen* en als *absorptielijnen*. Emissielijnen treden op als een heet gas met atomen licht uitzendt, bijvoorbeeld omdat een elektron bij een botsing met een ander atoom energie wint en naar een hoger energieniveau springt, en daarna spontaan weer terugvalt naar een lager energieniveau. Absorptielijnen treden op als er tussen een lichtbron (bijvoorbeeld: een ster) en de waarnemer relatief koel gas zit. Fotonen van de lichtbron worden door de atomen in het gas geabsorbeerd waardoor een elektron een hoger energieniveau bezet. Weliswaar valt ook hier het elektron vaak weer terug naar een lager energieniveau onder het uitzenden van het foton. Maar dat foton wordt in een *willekeurige* richting uitgezonden. Dit betekent dat in de gezichtslijn van de waarnemer naar de lichtbron er netto fotonen verdwijnen. Dit ziet men als een absorptielijn in het spectrum van de ster. Bij sterren is de koele steratmosfeer voor deze lijnen verantwoordelijk.

^a 1 eV = $1,6 \times 10^{-19}$ J.

^b 1 \AA = 10^{-10} m = 0,1 nm.



Figuur 1.8: De energieniveaus van het elektron in het waterstofatoom voor $n = 1$ (grondniveau) en $n = 2$ (links), en de bijbehorende energieniveaus (rechts). De energie ΔE is de energie die een foton bij absorptie aan het elektron moet geven om het elektron vanuit het grondniveau met $n = 1$ naar een hoger energieniveau te laten springen. Als het elektron daarna spontaan weer terugvalt naar een lager energieniveau is er sprake van emissie van een foton dat de vrijgekomen energie wegdraagt.

Kader 4: de ingeburgerde notatie voor de Hubble constante

Sterrenkundigen werken vaak met de dimensieloze grootte

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km/s per Mpc}} .$$

In termen van deze grootte heeft men:

$$t_H = \frac{1}{H_0} = 9,78 \times 10^9 h^{-1} \text{ jaar} \quad (\text{Hubble tijd}) ,$$

$$\frac{c}{H_0} = 2,99 h^{-1} \text{ Gpc} = 9,25 \times 10^{25} h^{-1} \text{ m} \quad (\text{Hubble afstand})$$

De beste metingen (PLANCK, 2015) geven $h = 0,673 \pm 0,009$.

Echter, strikt genomen is H_0 een snelheid/afstand en heeft dus de dimensie $[t]^{-1}$. Men kan dus een *Hubble tijd* definiëren via de relatie

$$t_H = \frac{1}{H_0} \text{ [s]}. \quad (1.5.14)$$

Handige omrekenfactoren zijn:

$$1 \text{ km/s per Mpc} = \frac{1}{3,086 \times 10^{19} \text{ s}} = \frac{1}{9,78 \times 10^{11} \text{ jaar}} \quad (1.5.15)$$

De gemeten waarde van de Hubble constante, $H_0 = 67,3 \text{ km/s per Mpc}$, levert zo:

$$t_H = 1,45 \times 10^{10} \text{ jaar}. \quad (1.5.16)$$

Wij zullen later zien dat dit een redelijke schatting is voor de leeftijd van ons heelal. Er zijn echter heelal-modellen waarin die relatie tussen de Hubble constante en de leeftijd van het heelal niet opgaat, zoals het *de Sitter heelal* dat later wordt besproken.

Hubble's waarneming van de met afstand toenemende vluchtsnelheid van verre sterrenstelsels was de eerste experimentele aanwijzing voor het feit dat ons heelal expandeert. Opmerkelijk genoeg was deze expansie al in 1922 voorspeld door de Russische wiskundige Alexander Friedmann als een mogelijke oplossing van Einstein's vergelijkingen voor een uniform heelal. Om Friedmann's voorspelling te begrijpen en in context te plaatsen moeten we kijken naar de ontwikkelingen in de theoretische fysica aan het begin van de 20^e eeuw.

Kader 5: het Doppler effect voor licht

Het Doppler effect wordt vaak geïllustreerd aan de hand van geluidsgolven, of golven op een wateroppervlak. In die gevallen is er een medium (resp. lucht en water) dat de golven ondersteunt. Voor lichtgolven is dat niet het geval: zij bestaan ook in vacuüm. Eén van de basis-aannamen van de relativiteitstheorie luidt:

- **de snelheid van lichtgolven in vacuüm is voor alle waarnemers hetzelfde: de lichtsnelheid c .**

Dit betekent dat voor licht in vacuüm altijd de volgende relatie geldt:

$$\nu = c/\lambda \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad (1.5.17)$$

met ν de golffrequentie (= 1/golfperiode), $c = 2,997 \times 10^8$ m/s de lichtsnelheid in vacuüm en λ de golflengte.

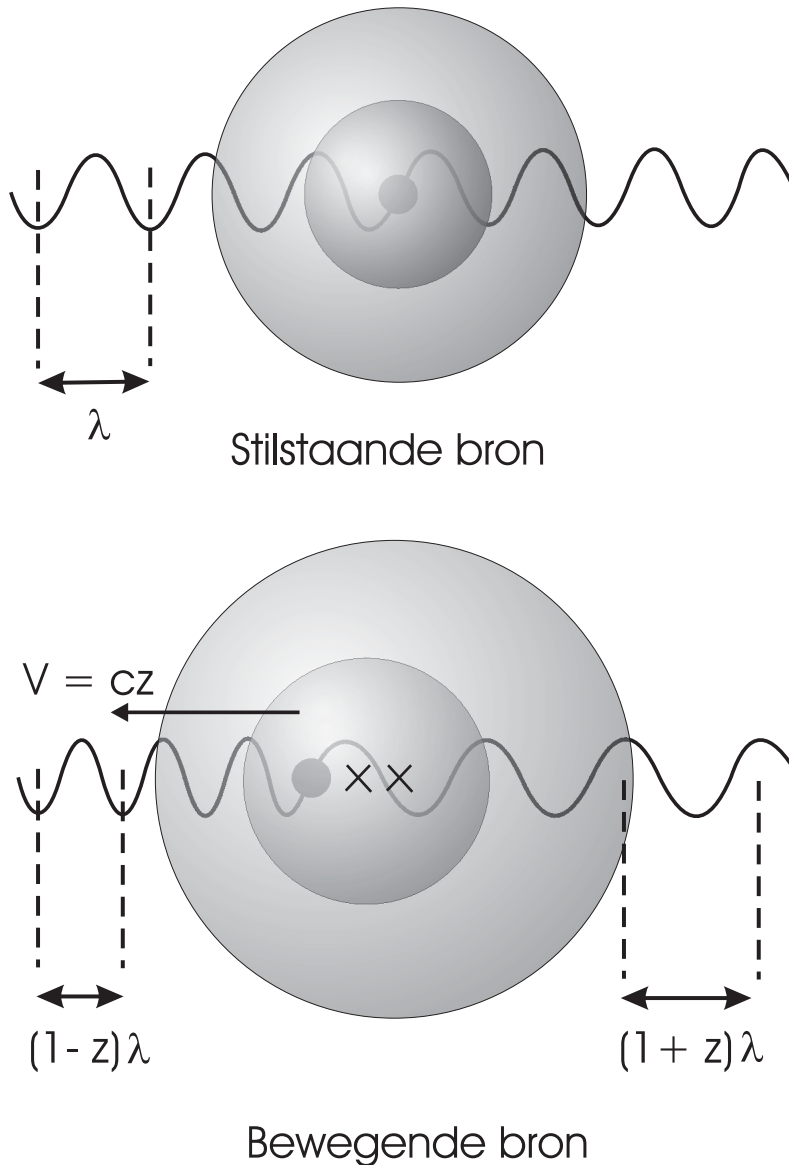
Formeel definieert men de roodverschuiving z in termen van de waargenomen golflengte λ_{obs} en de laboratorium-golflengte λ_e als:

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_e}{\lambda_e}. \quad (1.5.18)$$

Bij watergolven werkt het Doppler effect als volgt: Stel, een stilstaande bron (figuur 1.9a) zendt golven uit, die zich met een snelheid v over het wateroppervlak uitbreiden. Dit geeft een concentrisch ringenpatroon met de bron in het middelpunt, en een afstand tussen twee rimpels gelijk aan de golflengte λ_e . De frequentie ν_e van de golven (het aantal golven dat per seconde door de bron wordt uitgezonden) is gedefinieerd als:

$$\nu_e = v/\lambda_e. \quad (1.5.19)$$

Het golfpatroon verandert als de bron zich door het water beweegt (figuur 1.9b). De positie van het middelpunt van iedere rimpel ligt dan op de plaats die de bron inneemt op het moment dat de golf wordt uitgezonden.



Figuur 1.9: Een experiment met watergolven. In geval a (bovenste figuur) staat de bron van de golven stil, en zendt golven uit met frequentie ν_e , en golflengte $\lambda_e = v/\nu_e$, waarin v de snelheid van golfvoortplanting. De golffronten zijn dan concentrische cirkels. In geval b (onderste figuur) beweegt de bron met snelheid u van rechts naar links. De golflengte is vóór de bron in elkaar gedrukt, en achter de bron uitgerekt. De middelpunten van de opeenvolgende golffronten zijn ten opzichte van elkaar verschoven (de kruisjes in de onderste figuur), en de golffronten zijn niet langer concentrisch. De grootte z is hier voor het gemak gedefiniëerd als $z = u/c$.

Omdat het tijdsverschil tussen de uitzending van twee opeenvolgende golven gelijk is aan $\Delta t = 1/v_e$ liggen de middelpunten van opeenvolgende rimpels een afstand

$$\Delta x = u \Delta t = u/v_e$$

uit elkaar, er van uitgaande dat de bron met een snelheid u in de x -richting beweegt. De afstand tussen twee rimpels wordt daarom in elkaar gedrukt in de bewegingsrichting van de bron, en uit elkaar getrokken in de tegengestelde richting. Waarnemers recht voor en recht achter de bron meten een golflengte

$$\text{recht voor de bron: } \lambda_{\text{obs}} = \lambda_- = \frac{v-u}{v_e} = \left(\frac{v-u}{v}\right) \lambda_e ; \quad (1.5.20)$$

$$\text{recht achter de bron: } \lambda_{\text{obs}} = \lambda_+ = \frac{v+u}{v_e} = \left(\frac{v+u}{v}\right) \lambda_e .$$

De waarnemer recht achter de bron, te vergelijken met een waarnemer die de vluchtsnelheid van een ver sterrenstelsel in een uitdijend heelal tracht te bepalen, kent aan de bron een roodverschuiving toe ter grootte:

$$z = \frac{\lambda_+ - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{(v+u) - v}{v} = \frac{u}{v} . \quad (1.5.21)$$

Voor lichtgolven kan men dezelfde redenering ophangen, simpelweg omdat volgens de relativiteitstheorie de golfsnelheid altijd gelijk is aan de lichtsnelheid: $v = c \approx 300.000 \text{ km/s}$, *ongeacht* hoe snel de bron beweegt. Daarom verwacht men bij een bronnelheid $u = V = H_0 D$ (Hubble's wet in een uitdijend heelal!) een roodverschuiving

$$z = \frac{V}{c} = \frac{H_0 D}{c} .$$

(1.5.22)

In de praktijk is deze formule echter alleen geldig voor $V \ll c$ omdat een ander relativistische effect (het feit dat klokken in een bewegende bron langzamer lijken te lopen waardoor ook de golffrequentie afneemt) niet in rekening is gebracht. Bovendien is de interpretatie van dit resultaat in de Algemene Relativiteitstheorie subtiel anders, zoals we later zullen zien.

Hoofdstuk 2

Einstein, Friedmann en de Relativiteitstheorie

Min of meer samenvallend met de ontwikkelingen in de sterrenkunde vonden er een tweetal fundamentele veranderingen plaats in de theoretische fysica: de ontwikkeling van de *Quantummechanica* en de *Relativiteitstheorie*. De quantummechanica laat zien dat de ‘klassieke natuurkunde’, bouwend op de ideeën van Newton, niet van toepassing is op kleine schaal, de schaal van atomen en fundamentele deeltjes. De relativiteitstheorie doet hetzelfde, maar nu juist voor de fysica op grote schaal, en bij snelheden in de buurt van de lichtsnelheid.

Voor de kosmologie is allereerst Einstein’s Algemene Relativiteitstheorie (ART) van belang. Zij geeft een fundamenteel andere beschrijving van de zwaartekracht, ruimte en tijd dan de (tot dan toe) zo succesvolle theorie van Newton. Tabel 1 geeft de meest belangrijke verschillen in de zienswijze van beide theorieën.

Na de publicatie van Einstein’s Algemene Relativiteitstheorie in 1915 heerste er aanvankelijk scepsis, simpelweg omdat de denkwijze van de theorie radicaal afwijkt van het ingeburgerde beeld volgens Newton en zijn opvolgers. Al snel werd echter duidelijk dat de theorie waarschijnlijk juist is: de theorie verklaarde de al lang bekende precessie van het perihelium¹ van de binnenste planeet van ons Zonnestelsel: Mercurius. Bovendien voorspelde de Algemene Relativiteitstheorie dat licht in een zwaartekrachtsveld wordt afgebogen. De afbuiging van licht door de Zon werd in 1919 inderdaad gemeten door Eddington & Dyson tijdens een Zonsverduistering. De gemeten afbuiging kwam goed overeen met de door Einstein voorspelde waarde, zij het met behoorlijke meetonzekerheden. Sindsdien hebben veel gevoeliger experimenten de juistheid van de voorspellingen van de ART bevestigd.

¹*Perihelium* = punt van dichtste nadering tot de Zon; *Precessie* = draaiing van de verbindingslijn van het zonnecentrum tot het perihelium. Die draaiing zorgt er voor dat de mercuriusbaan geen zuivere ellips (een gesloten baan!) is, maar ‘net niet’ sluit!

2.1 Friedmann en zijn modellen

In 1922 liet de Russische wiskundige Alexander Friedmann zien dat Einstein's vergelijkingen (zoals toen gepubliceerd) voor een simpel, ruimtelijk uniform en isotroop heelal, alleen oplossingen toelaten waarin het heelal als geheel uitzet of krimpt. In deze berekeningen gaat de uitzetting steeds trager (en de krimp steeds sneller) als een gevolg van de aantrekkende zwaartekracht van alle materie in het heelal. Als er voldoende materie is blijkt het zelfs mogelijk dat het heelal na een fase van expansie uiteindelijk weer instort. Wij zullen Friedmann's vergelijkingen later nader bekijken.

Friedmann's berekening ging een paar jaar vooraf aan Hubble's waarnemingen. Tot dat moment werd het door de meeste sterrenkundigen als 'vanzelfsprekend' beschouwd dat het heelal op grote schaal onveranderlijk, en daarom eeuwigdurend is. In Friedmann's modellen veranderde het heelal en had het een eindige leeftijd. Einstein zelf introduceerde daarom een aanpassing van zijn theorie waarin een onveranderlijk (statisch) heelal mogelijk was.

Die aanpassing vereist de introductie van de zgn. *kosmologische constante*, gewoonlijk aangeduid met het symbool Λ , in de vergelijkingen (zie **Kader 6**). Na Hubble's waarnemingen verdween die kosmologische constante lange tijd (zo'n veertig jaar) in het vergeethoekje. Tegenwoordig speelt (zoals we later zullen zien) de kosmologische constante weer een belangrijke rol in de kosmologie.

2.2 De schaalfactor en de wet van Hubble

De waarnemingen vertellen ons dat de uitdijing van het heelal op voldoende grote schaal (miljoenen lichtjaren) in alle richtingen even snel gaat. Bovendien ziet ons heelal er, gemiddeld gesproken, overal hetzelfde uit. De expansie van het heelal heeft geen voorkeursrichting, en men kan onmogelijk een middelpunt van expansie aanwijzen!

In de ART kan die situatie eenvoudig worden gerealiseerd omdat de theorie toelaat dat de ruimte zelf expandeert. Het simpelste model dat past met de waarnemingen stelt dat (wederom op voldoende grote schaal) iedere afstand D in het heelal te schrijven is als:

$$D(t) = \varpi \times R(t). \quad (2.2.1)$$

Hier is ϖ een constante grootte met dimensie [lengte], en is $R(t)$ een dimensieloze universele (d.w.z: overal hetzelfde!) schaalfactor die alléén van de tijd t afhangt. Omdat kloksnelheden in de relativiteitstheorie niet absoluut zijn moet men de tijd t interpreteren als de *kosmische tijd*. Deze correspondeert met de kloksnelheid van alle 'typische waarnemers' die om zich heen een zuivere (d.w.z: in alle richtingen even snelle) Hubble-expansie zien.

Tabel 1: Newton's en Einstein's zienswijze

Onderwerp	Newton	ART (Einstein)
Ruimte en tijd	Aparte zaken: géén oorzakelijk verband	Gemeenschappelijke beschrijving in een vier-dimensionale <i>ruimte-tijd</i>
Ruimte:	De ruimte is vlak (Euclidisch), absoluut en onveranderlijk (statisch); Deze drie-dimensionale ruimte is voor iedere waarnemer gelijk	De ruimte is (in het algemeen gesproken) dynamisch (veranderlijk) en gekromd; Vlakke, statische ruimtes zijn speciaal!
Tijd:	Tijdsmeting geeft voor iedere waarnemer hetzelfde resultaat: de kloksnelheid is voor alle waarnemers gelijk!	De tijdsmeting hangt af van de bewegingstoestand van de waarnemer en/of van het zwaartekrachtsveld waarin hij of zij zich bevindt; De kloksnelheid is niet voor iedereen hetzelfde.
Lichtsnelheid:	Formeel oneindig groot (∞)	Altijd gelijk aan c ($= 2.99 \times 10^8$ m/s), ongeacht de snelheid van de waarnemer!
Gravitatie:	Gravitatie is een kracht die deeltjesbanen in de vlakke ruimte kromt	Gravitatie kromt de ruimte zelf, waardoor deeltjesbanen krom lijken vanuit 'vlak perspectief'
Bron van gravitatie:	rustmassa m	energie E (via $m_{\text{eff}} = E/c^2$)
Afstandsmaat:	De afstand tussen twee punten in de 3-dimensionale ruimte is gelijk voor iedere waarnemer	De afstand tussen twee gebeurtenissen in de 4-dimensionale ruimte-tijd is gelijk voor iedere waarnemer
Snelheden:	kunnen zonder meer worden opgeteld of afgetrokken (Galilei-transformaties)	meer ingewikkelde relaties (Lorentz-transformaties)
Fundamentele grootheid:	zwaartekrachtspotentialiaal Φ	krommingstensor \mathbf{R}

Een simpele analogie voor een uniform maar expanderend heelal is een rijzend krentenbrood, met de krenten in de rol van sterrenstelsels, en het deeg in de rol van de ruimte. Een andere analogie is een ballon, zie **Kader 7** voor een kritische discussie. Het rijzen van het deeg is dan analoog aan de expansie van de ruimte. Deze analogie illustreert ook iets anders fundamenteels: tijdens het rijzen bewegen de krenten niet ten opzichte van het deeg! Ze staan in zekere zin stil, en lijken te bewegen omdat wij gewend zijn te denken in termen van vaste (niet expanderende) ruimte. De Hubble-snelheid $V = H_0 D$ uit Hubble's wet (1.5.9) is dan formeel ook geen echte snelheid!

In wat volgt gebruiken we vaak een andere versie van relatie (2.2.1). Als we de huidige leeftijd van het heelal aanduiden met t_0 , de huidige waarde van de schaalfactor met R_0 en de huidige afstand tot een ver sterrenstelsel met D_0 dan geldt:

$$D_0 = \varpi \times R_0 \iff \varpi = \frac{D_0}{R_0}. \quad (2.2.2)$$

Relatie (2.2.1) is dan te schrijven als:

$$D(t) = D_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right). \quad (2.2.3)$$

We demonstreren nu dat deze simpele aanname voor de afstand in een expanderend heelal automatisch Hubble's wet oplevert!

2.3 De Hubble parameter H

De expansiewet (2.2.3) levert meteen de wet van Hubble op. De vluchtsnelheid van een sterrenstelsel wordt, zoals iedere snelheid, formeel gegeven door de tijdsafgeleide van de afstand:

$$V(t) \equiv \frac{dD}{dt} = \frac{D_0}{R_0} \frac{dR}{dt}. \quad (2.3.4)$$

Gebruiken we nu (2.2.3), geschreven als

$$\frac{D_0}{R_0} = \frac{D(t)}{R(t)}, \quad (2.3.5)$$

dan kan uitdrukking 2.3.4 worden gegoten in een algemene vorm, waarin de grootheden D_0 en R_0 niet langer voorkomen:

$$V(t) = \frac{D(t)}{R(t)} \frac{dR}{dt} \equiv H(t) \times D(t). \quad (2.3.6)$$

Kader 6: Een Newtoniaanse analogie en de geschiedenis van Λ

Einstein introduceerde de kosmologische constante in zijn vergelijkingen op niet-veranderende (statische) oplossingen mogelijk te maken. Einstein dacht, net als vele van zijn tijdsgenoten, dat het heelal (op grote schaal) helemaal niet evolueert, maar statisch is.

Onze afleiding van Friedmann's vergelijking laat al zien wat het probleem is: zelfs als we ons sterrenstelsel uit rust laten beginnen op tijdstip $t = 0$, valt het onder invloed van de zwaartekracht van de materie in de bol versneld naar het centrum. Een statische oplossing van de vergelijking bestaat eenvoudigweg niet zonder een extra kracht die de zwaartekracht compenseert. De kosmologische constante geeft precies die benodigde extra kracht.

Heeft de bol een straal r en massa M , dan is de zwaartekrachtsversnelling g_{grav} aan de rand van de bol gelijk aan (zie Hoofdstuk 3.2 en figuur 6)

$$g_{\text{grav}} = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{4\pi G \rho}{3} r. \quad (2.3.7)$$

In dit (enigzins versimpelde) beeld betekent de introductie van een kosmologische constante de introductie van een *afstotende* tegenkracht met versnelling

$$g_{\Lambda} = +\frac{\Lambda r}{3}. \quad (2.3.8)$$

Een statische oplossing, het zogenaamde *Einstein Heelal*, is mogelijk als deze twee krachten elkaar precies opheffen. Dit alleen kan als $g_{\text{grav}} + g_{\Lambda} = 0$, zodat

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G} = 2\rho^{\text{vac}}. \quad (2.3.9)$$

Daarom ziet men wel eens termen als '*afstotende zwaartekracht*' voor het effect van Λ , maar dat is in de Algemene Relativiteitstheorie niet de correcte interpretatie. Deze terminologie kan daarom het best worden vermeden!

In Newton's theorie van de zwaartekracht kan men een kosmologische constante Λ invoeren door de Poissonvergelijking voor de zwaartekrachtspotential Φ te schrijven als

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_m - \Lambda. \quad (2.3.10)$$

Hier is G Newton's gravitatieconstante en is ρ_m de massadichtheid van materie. De effecten van Λ zijn dan (globaal) hetzelfde als in de Algemene Relativiteitstheorie.

Uit deze vorm van de vergelijking ziet men dat de grootte $\Lambda/4\pi G$ een massadichtheid is (dat wil zeggen: $\Lambda/4\pi G$ kan worden uitgedrukt in kg/m^3). Newton had geen enkele reden om deze extra term toe te voegen. Dat blijkt al uit het feit dat de *gemeten* waarde voor Λ overeen komt met een zeer kleine dichtheid:

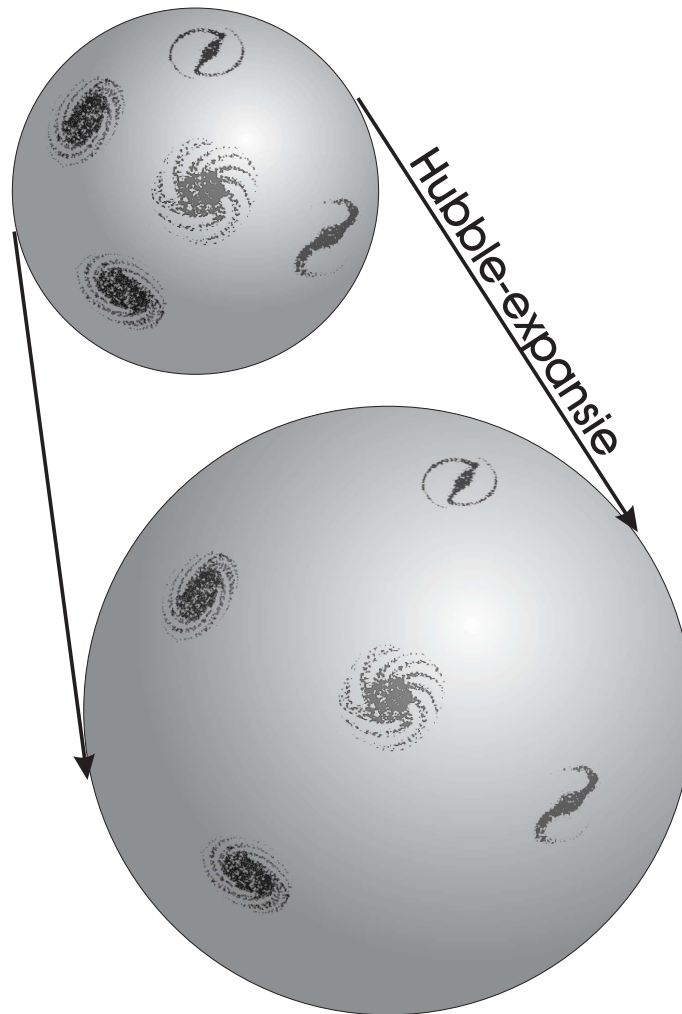
$$\frac{\Lambda}{4\pi G} \simeq 1,28 \times 10^{-26} \text{ kg}/\text{m}^3. \quad (2.3.11)$$

In de geschiedenis van Λ binnen de kosmologie zijn de belangrijkste stappen:

- Febr. 1917: Einstein voegt de Λ -term toe aan zijn veldvergelijkingen, en vindt een statische heelal voor $\Lambda = 4\pi G\rho_m$.
- Maart 1917: De Sitter vindt een speciale 'statische' oplossing (zie onder!) met $\rho_m = 0$, $\Lambda > 0$;
- 1920: Publicatie van Eddington's boek *Space, Time and Gravitation*, een van de eerste boeken over de Algemene Relativiteitstheorie. Dit boek is voor Friedmann een belangrijke bron.
- 1922: Friedmann laat zien dat Einstein's vergelijkingen met een uniforme en isotrope massaverdeling expanderende en/of instortende heelal-oplossingen toelaten (berekening wordt genegeerd tot ~ 1925). In eerste instantie beschrijft Friedmann het *gesloten heelal*.
- 1922: Einstein schrijft artikel waarin hij zegt dat Friedmann's oplossingen wiskundig onjuist zijn.
- 1923: Weyl laat zien dat dat in de Sitter's model roodverschuiving optreedt die toeneemt met de afstand, en dat testdeeltjes in een dergelijk heelal zich exponentieel van elkaar verwijderen;
- Mei 1923: Einstein schrijft aan Weyl: '*Wenn schon keine quasi-statische Welt, dann Fort mit dem Kosmologischen Glied*', en geeft de kosmologische constante op.
- 1924: Friedmann geeft ook oplossingen voor een *open heelal*.
- 1925: Friedmann sterft aan tyfus.
- 1925: Einstein erkent dat Friedmann's oplossingen van voor een uitzettend of krimpend heelal wiskundig juist zijn. Hij twijfelt echter nog steeds aan de fysische correctheid.
- 1927: Lemaître legt het verband tussen de roodverschuiving en een expanderend heelalmodel met uniforme massaverdeling. Ook dit artikel wordt eerst grotendeels genegeerd;
- 1929: Hubble en Humason publiceren het resultaat voor de radiële snelheid van sterrenstelsels ($V \propto D$) dat later bekend staat als de wet van Hubble;
- 1930: Eddington laat zien dat de statische heelal-oplossing van Einstein met $\Lambda = 4\pi G\rho_m$ **instabiel** is; (Lemaître had dit in 1927 ook al laten zien, maar werd genegeerd)
- 1931: Lemaître interpreteert de toestand van oneindige dichtheid op tijdstip $t = 0$ (Oerknal) als de ontploffing van een *primeval atom*.
- 1933: Einstein en Lemaître propageren de zienswijze dat het vlakke heelal een speciale oplossing is van Friedmann's vergelijkingen ($k = 0$).
- 1933: Lemaître laat zien dat Λ wiskundig equivalent is met een ideale vloeistof met dichtheid $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ en *negatieve* druk $P = -\rho_\Lambda c^2$;

- 1933: Zwicky toont aan dat de Coma cluster van sterrenstelsels een grote hoeveelheid ongeziene ('donkere') materie moet bevatten;
Een eerste aanwijzing dat het heelal ingewikkelder is dan gedacht!
- Voor alle duidelijkheid: *donkere materie* en *donkere energie* zijn niet hetzelfde!
- 1948: H. Casimir (NatLab, Philips) laat zien dat vacuümfluctuaties zoals voorspeld door kwantumtheorie aanleiding geven tot meetbare effecten; Het *Casimir effect* wordt in 1958 daadwerkelijk gemeten.
- 1955: Einstein overlijdt in Princeton (USA).
- 1957: Burbidge, Burbidge, Fowler & Hoyle, en onafhankelijk daarvan Cameron doen de eerste nauwkeurige berekeningen van nucleosynthese in het vroege heelal (*Big Bang Nucleosynthesis*).
- 1964: Ontdekking van de *Kosmische achtergrondstraling* door Penzias & Wilson: bewijs voor een hete Oerknal.
- 1968: Ya. B. Zeldovich laat zien dat Λ equivalent is met een vacuümdichtheid en legt het verband met vacuümfluctuaties; Naïeve berekeningen voorspellen een veel te grote (door waarnemingen uitgesloten) waarden voor Λ ten gevolge van vacuümfluctuaties;
- 1978: Vera Rubin leidt uit de rotatiekromme van sterrenstelsels af dat ook zij donkere materie moeten bevatten;
- 1980-1981: *Inflatie-theorie* gebaseerd op kwantum-veldentheorieën doet zijn intrede; (Alan Guth; Andei Linde en anderen);
 Daarin geven kwantumvelden gedurende korte tijd een bijdrage aan $\Lambda \neq 0$;
- 1990: Efstathiou laat zien dat simulaties van *structuurvorming* in het heelal in overeenstemming met de waarnemingen zijn te brengen in een vlak heelal met donkere materie en een kosmologische constante, de zgn. Λ CDM modellen;
- 1998-1999: Twee groepen (Ries *et al.*; Perlmutter *et al.*) laten zien dat de gegevens van verre supernovae (Type 1A supernovae) het eenvoudigst kunnen worden verklaard door aan te nemen dat $\Lambda \neq 0$, en dat $\rho_\Lambda > 2\rho_m$;
 Daardoor *versnelt* de expansie van het heelal momenteel;
- 1999: Michael Turner (FermiLab, Chicago) introduceert het begrip *Dark Energy* als een alternatieve term voor de kosmologische constante;
- 2003-2015: Metingen aan de kosmische achtergrondstraling door WMAP en PLANCK bevestigen het bestaan van een kosmologische constante.

Deze opsomming is grotendeels gebaseerd op: L. Calder & O. Lahav: *Dark Energy*, A&G 49, Februari 2008,
 en A. Belenkiy: *Alexander Friedmann and the origins of modern cosmology*, Physics Today, 65, 38, October 2012.



Figuur 2.1: De ballon-analogie voor een expanderend heelal. Het oppervlak van de ballon is een twee-dimensionale analogie voor ons heelal. Sterrenstelsels verwijderen zich steeds verder van elkaar naarmate de ballon verder wordt opgeblazen, maar worden zelf niet groter.

Relatie (2.3.6) heeft de vorm van Hubble's wet, $V \propto D$, en men kan de relatie tussen de Hubbleconstante en de schaalfactor meteen aflezen:

$$H(t) = \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right).$$

(2.3.12)

Hieruit ziet men dat de Hubble-constante in het algemeen helemaal niet constant is, maar afhangt van de schaalfactor en zijn tijdsafgeleide. Om verwarring te voorkomen noemen wij $H(t)$ vanaf nu de *Hubbleparameter*.

De constante H_0 in Hubble's wet (1.5.9) is dan ook niets anders dan de huidige waarde van de Hubbleparameter: $H_0 = H(t_0)$. De verandering van $H(t)$ voltrekt zich op een tijdschaal van de orde van de leeftijd van het heelal, zo'n 14 miljard jaar.

Dat betekent dat (naar menselijke maatstaven) de Hubbleparameter inderdaad als een constante grootheid mag worden beschouwd als men de waarnemingen van verre objecten in het heelal analyseert.

Kader 7: de (niet helemaal perfecte) ballon-analogie

Voor de expansie van het heelal wordt vaak de ballon-analogie gebruikt, zie figuur 2.1. Sterrenstelsels zitten op het ballon-oppervlak geplakt. Ieder sterrenstelsel ziet de naburige stelsels op het oppervlak steeds verder weg staan naarmate de ballon verder wordt opgeblazen. Als je de afstand tussen sterrenstelsels meet (*langs het ballon-oppervlak!*), dan geldt dat die afstand evenredig is met de straal van de ballon, analoog aan relatie (2.2.1) voor het heelal.

Samenvattend: de ballon-analogie geeft de volgende facetten van de werkelijkheid correct weer:

- De expansie is uniform: de toename van de afstand tussen twee willekeurige sterrenstelsels gaat bij ieder paar stelsels volgens exact dezelfde wet;
- Er is geen enkel sterrenstelsel dat een uitzonderingspositie inneemt, en kan claimen dat het het middelpunt van de expansie herbergt; Voor een naieve waarnemer *lijkt* het alleen maar zo!
- De sterrenstelsels blijven zelf even groot.

De analogie is echter niet perfect, met name vanwege de volgende twee redenen:

1. Wiskundig heeft men drie dimensies nodig om -bij een vlakke ruimte- een bolvormig oppervlak in kwijt te kunnen. Zowel binnen als buiten het gesloten ballon-oppervlak is dan ook nog ruimte! In de werkelijkheid van een uitdijend heelal, dat drie ruimtelijke dimensies kent, zou men kunnen denken dat een gekromd, expanderend heelal een extra (vierde) ruimtelijke dimensie nodig heeft omdat het anders ‘niet past’. Dat is echter **niet** het geval. In de theorie is het absoluut niet nodig om die extra dimensie te introduceren. In de ballon-analogie: alleen het gekromde, twee-dimensionale ballon-oppervlak bestaat, en daar buiten zit niets! Het is heel goed mogelijk de eigenschappen van het twee-dimensionale ballon-oppervlak wiskundig te beschrijven zonder een extra (derde) dimensie in het leven te roepen. Iets dergelijks geldt ook voor heelalmodellen in de Relativiteitstheorie.
2. De foute interpretatie van de ballon-analogie zoals in punt 1 geschetst leidt ook meteen tot een voorkeurspositie: het middelpunt van de ballon. Echter, dat middelpunt ligt niet op het oppervlak van de ballon en heeft daarom fysisch geen betekenis. Zo is er dus ook géén expansiemiddelpunt in een expanderend heelal.

2.4 Friedmann's vergelijking

Het simpele afstandsrecept (2.2.1) leidt op natuurlijke wijze tot Hubble's wet. Wat nog ontbreekt is een vergelijking die aangeeft hoe de schaalfactor $R(t)$ verandert in de tijd. Dat is de vergelijking die Friedmann als eerste heeft afgeleid. Zijn afleiding gebruikt de ART, maar gelukkig is er een klassiek (Newtoniaans) analogon dat tot hetzelfde resultaat leidt: een sferische wolk, gevuld met koude materie, die expandeert onder invloed van zijn eigen zwaartekracht.

Neem een sterrenstelsel met massa m , vastgeprikt op de rand van een massieve, expanderende bol met een straal $r(t)$ en massa M . Het sterrendeeltje dient als 'testdeeltje' om de expansie van de bol te volgen. Door de hele bol is de massa gelijkmatig verdeeld, met een massadichtheid

$$\rho = \frac{\text{massa bol}}{\text{volume bol}} = \frac{M}{4\pi r^3/3} \text{ [kg/m}^{-3}\text{]}. \quad (2.4.13)$$

We nemen aan dat de expansie van de bol representatief is voor de Hubble-expansie door de straal te schrijven als (zie vergelijking 2.2.1)

$$r(t) = \varpi R(t), \quad (2.4.14)$$

met ϖ een constante. Volgens de wet van Hubble is de expansie-snelheid ten opzichte van het centrum van de bol dan gelijk aan $V = Hr$, met $H = (1/R)(dR/dt)$ de Hubbleparameter. Deze situatie is geschetst in figuur (2.2).

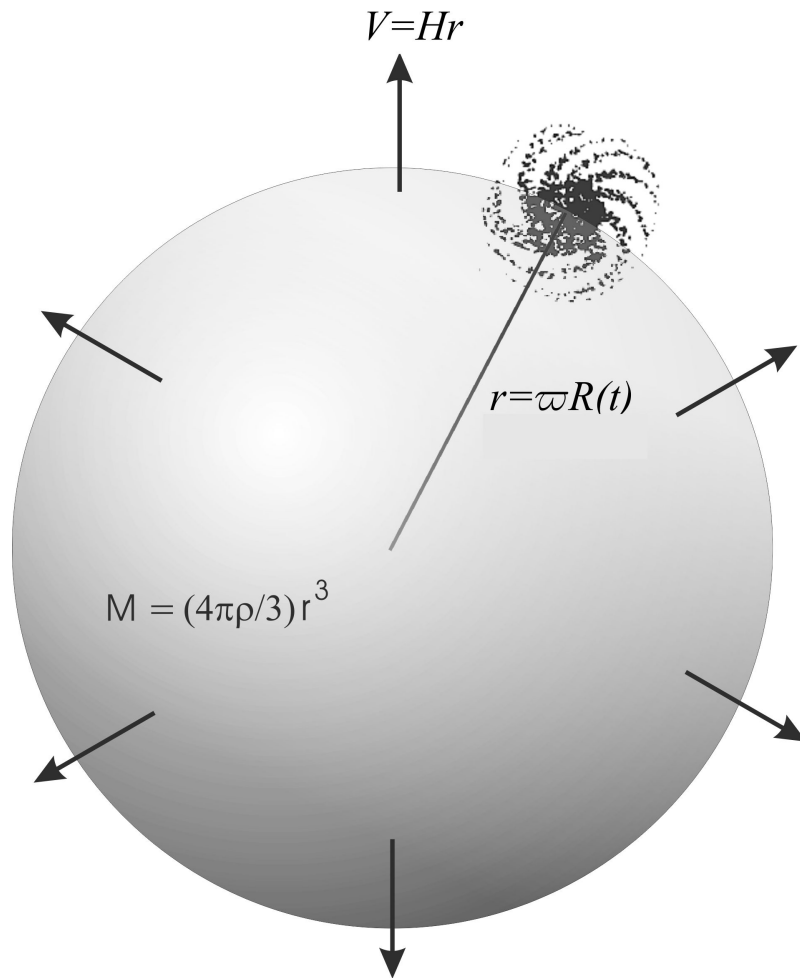
De beweging van het sterrenstelsel ten opzichte van het middelpunt van de bol met snelheid V wordt beschreven met behulp van de wet van energiebehoud:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \text{constant} \equiv E. \quad (2.4.15)$$

De eerste term is de kinetische energie, met $V = Hr$ de vluchtsnelheid van het sterrenstelsel ten opzichte van het centrum van de bol. De tweede (negatieve) term is de gravitationele potentiële energie (bindingsenergie) van het sterrenstelsel ten gevolge van de aantrekkende werking van de massa in de bol. De evenredigheidsconstante G , gelijk aan

$$G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1},$$

is Newton's *gravitatieconstante*. De massa M van de bol is constant, zolang er netto geen massa de bol in- of uitstroomt: de wet van massabehoud.



Figuur 2.2: De situatie die wordt gebruikt bij de afleiding van de Friedmannvergelijking. Een sterrenstelsel met massa m op een bol met een in de tijd toenemende straal $r(t)$. De bol volgt de expansie van het heelal. De vluchtsnelheid weg van het middelpunt van de bol is daarom volgens de Hubble-wet gelijk aan $V = H r$.

Men hoeft zelfs niet aan te nemen dat de ruimte buiten de bol leeg is! Mits de bol maar deel is van een veel uitgestrektere bolvormige massaverdeling oefent de massa *buiten* de bol, om redenen van symmetrie, geen netto zwaartekracht uit op het sterrenstelsel. Deze externe massa draagt daarom niet bij aan de bindingsenergie.

Substitueren we Hubble's wet $V = Hr$ in vergelijking (2.4.15) en gebruiken we relatie (2.4.13), dan volgt:

$$\frac{m}{2} H^2 r^2 - \frac{4\pi G m}{3} \rho r^2 = E. \quad (2.4.16)$$

De straal van de bol volgt uit de universele expansiewet, en is te schrijven als (zie 2.3.5),

$$r(t) = r_0 \times \left(\frac{R(t)}{R_0} \right). \quad (2.4.17)$$

Vullen we dit in vergelijking (2.4.16) in, en delen we beide zijden van de vergelijking door $mr^2/2$, dan volgt een vergelijking voor de Hubbleparameter, de **Friedmannvergelijking**:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{k}{R^2(t)}. \quad (2.4.18)$$

Hier is $k = -2ER_0^2/mr_0^2$ een constante. De waarde van deze constante bepaalt het verloop van de evolutie van het heelal! De mogelijkheden staan opgesomd in onderstaande tabel

Merk op dat ook de dichtheid ρ in de bol afhangt van de tijd: als de bol expandeert blijft de totale massa gelijk, maar neemt de interne dichtheid af! Vanwege relatie (2.4.17) kan men schrijven:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{M}{4\pi r^3/3} = \frac{M}{4\pi r_0^3/3} \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3} \\ &= \rho_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3}. \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Deze dichtheidswet, die de verdunning van koude materie weergeeft, komen we later nogmaals tegen. In **Kader 8** laten we zien waarom men een kosmologische constante Λ moet introduceren voor statische oplossingen met $R = \text{constant}$. **Tabel 2** geeft de classificatie van mogelijke oplossingen van Friedmann's vergelijking.

Kader 8: statische oplossingen van Friedmann's vergelijking en de kosmologische constante

Einstein introduceerde de kosmologische constante in reactie op Friedmann's evoluerende modellen. Op dat moment geloofde Einstein, net als vele van zijn tijdsgenoten, dat het heelal (op grote schaal) helemaal niet evolueert, maar statisch is.

Onze afleiding van Friedmann's vergelijking laat al zien wat het probleem is: zelfs als we ons sterrenstelsel uit rust laten beginnen op tijdstip $t = 0$, valt het onder invloed van de zwaartekracht van de materie in de bol versneld naar het centrum. Een statische oplossing van de vergelijking bestaat eenvoudigweg niet zonder een extra kracht die de zwaartekracht compenseert. De kosmologische constante geeft precies die benodigde extra kracht.

Heeft de bol een straal r en massa M , dan is de zwaartekrachtsversnelling g_{grav} aan de rand van de bol gelijk aan (zie Hoofdstuk 3.2 en figuur 6)

$$g_{\text{grav}} = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{4\pi G \rho}{3} r. \quad (2.4.20)$$

In dit (enigzins versimpelde) beeld betekent de introductie van een kosmologische constante de introductie van een *afstotende* tegenkracht met versnelling

$$g_{\Lambda} = +\frac{\Lambda r}{3}. \quad (2.4.21)$$

Een statische oplossing, het zogenaamde *Einstein Heelal*, is mogelijk als deze twee krachten elkaar precies opheffen. Dit alleen kan als $g_{\text{grav}} + g_{\Lambda} = 0$, zodat

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G}. \quad (2.4.22)$$

Daarom ziet men wel eens termen als '*afstotende zwaartekracht*' voor het effect van Λ , maar dat is in de Algemene Relativiteitstheorie niet de correcte interpretatie. Deze terminologie kan daarom het best worden vermeden!

Na een paar jaar gaf Einstein zelf het idee van de kosmologische constante op, in reactie op de modellen van de Sitter waarin de kosmologische constante een exponentieel groeiende schaalfactor geeft, dus weer geen statisch heelal.

Maar belangrijker is dat men kan laten zien dat de statische oplossing niet *stabiel* is: als hij infinitesimaal uitzet gaat de uitzetting daarna versneld door. Als men het Einstein heelal infinitesimaal laat krimpen stort het vervolgens helemaal in. Het zo zorgvuldig gecreëerde evenwicht is dus *labiel*!

Tabel 2: Friedmann-oplossingen met koude materie en $\Lambda = 0$

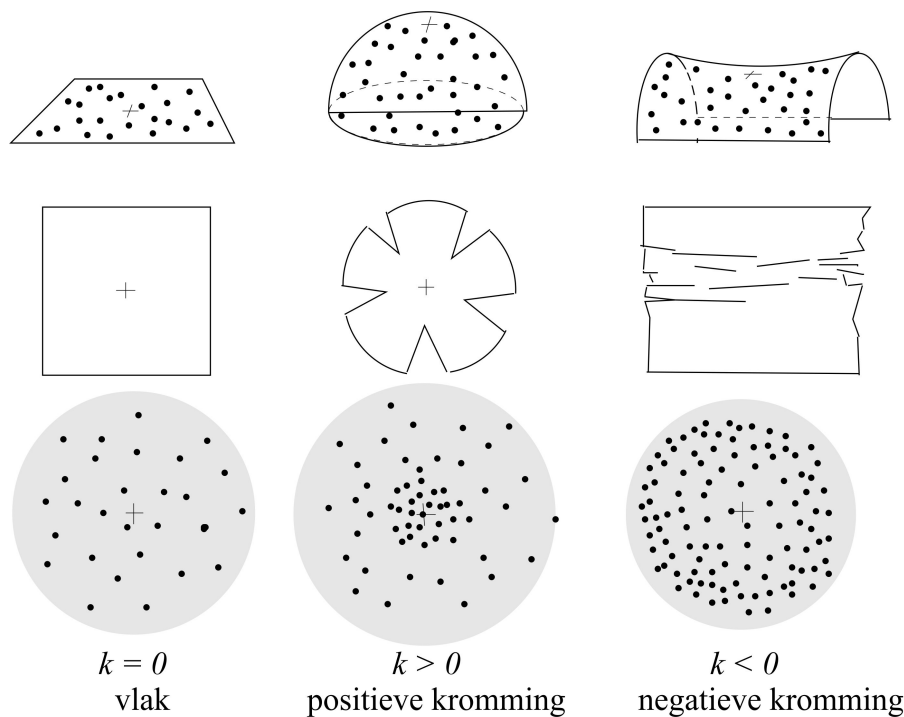
$k < 0$	$E > 0$	open heelal De expansie gaat altijd verder als de tijd voortschrijdt; $r \rightarrow \infty$ en $dr/dt = \text{constant} > 0$ als $t \rightarrow \infty$. Het open heelal duurt eeuwig.
$k = 0$	$E = 0$	vlak heelal Grensgeval: de expansie stopt als $r \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, zodat $dr/dt = 0$ als $t \rightarrow \infty$. Ook het vlakke heelal duurt eeuwig;
$k > 0$	$E < 0$	gesloten heelal In de toekomst stopt de expansie ($r = r_{\text{max}}$ op tijdstip $t = t_{\text{max}}$) met $dr/dt = 0$ op $t = t_{\text{max}}$. Het heelal stort daarna weer in; Het heelal heeft een eindige levensduur, gelijk aan $2 t_{\text{max}}$.

De oplossingen met positieve energie ($E > 0$, $k < 0$) corresponderen met oplossingen waarbij de snelheid van het sterrenstelsel groter is dan de ontsnappingsnelheid $V_0 = \sqrt{2GM/r}$ aan de rand van de bol. Die oplossingen laten toe dat het sterrenstelsel oneindig ver wegloopt van het centrum van de bol, en dus altijd naar buiten beweegt. Oplossingen met negatieve energie ($E < 0$, $k > 0$) zijn oplossingen waarin de snelheid van het sterrenstelsel kleiner is dan de ontsnappingsnelheid, waardoor het op een eindige afstand r_{max} tot stilstand komt, en vervolgens weer terugvalt richting centrum.

Nog een drietal opmerkingen over deze afleiding:

1. Het sterrenstelsel is in deze discussie slechts een testdeeltje dat handig is om de beweging van de rand van de bol te visualiseren. *Ieder* massapunt op de rand voldoet aan dezelfde vergelijking, inclusief de deeltjes van de bol zelf. De hier gevonden vergelijking (en haar oplossing) is dus ook op hen van toepassing. Daarom beschrijft zij ook de expansie van de bol!
2. Men kan ook een vergelijking voor de versnelling d^2R/dt^2 van de expansie afleiden met dit simpele model, zie **Kader 10**.

3. In de uiteindelijke vergelijking komt alleen de schaalfactor $R(t)$ maar voor, *niet* de straal r_0 van de bol. Dat betekent dat deze vergelijking voor een hele klasse oplossingen geldt met verschillende waarden voor r_0 ! Weliswaar hebben verschillende bollen een verschillende waarde van k , maar alleen het **teken** van k bepaalt het globale gedrag van de oplossing! Wiskundigen zeggen dan dat al de oplossingen van een bepaalde klasse ($k < 0$, $k = 0$ en $k > 0$) op elkaar zijn af te beelden. Meer over de rol van k in **Kader 9**.



Figuur 2.3: De geometrie van een heelal in een twee-dimensionale analogie. De oppervlakken zijn "momentopnamen" van het heelal op een willekeurig tijdstip. Het meest linkse geval in de bovenste rij plaatjes is het vlakke heelal ($k = 0$) een plat vlak in deze analogie. Het middelste geval (de bol) is het gesloten heelal met een positieve kromming ($k > 0$) en het rechtse geval (het zadeloppervlak) het open heelal met negatieve kromming ($k < 0$). Het vlakke- en open heelal zijn oneindig in de zin dat de oppervlakken tot in het oneindige worden voortgezet. Het gesloten heelal is eindig in de zin dat het oppervlak gesloten is.

Als je probeert de oppervlakken "plat te slaan" hou je in het geval van het open heelal ruimte over, en kom je in het geval van het gesloten heelal ruimte te kort (middelste rij plaatjes). Daarom kun je op grote afstand in een open heelal meer, en in een gesloten heelal minder sterrenstelsels (de puntjes) kwijt dan in een vlak heelal. Dit is aangegeven in de onderste rij figuren.

Kader 9: de relativistische interpretatie van k

In de Algemene Relativiteitstheorie is k géén maat voor de energie: daar is het een maat voor de kromming van het heelal. Figuur 2.3 illustreert dat. De Algemene Relativiteitstheorie is een geometrische theorie, die zich afspeelt in een vier-dimensionale ruimte met één tijdscoördinaat en drie ruimtelijke coördinaten. Zwaartekracht bepaalt in de theorie hoe de ruimte is gekromd. Die kromming uit zich in het *afstandsrecept* in vier dimensies.

Voor ieder punt P in zo'n vier-dimensionale ruimte (een betere benaming is 'gebeurtenis', simpelweg omdat het punt P zowel de plaats als het tijdstip bepaalt) heeft men dus vier getallen nodig om zijn positie te specificeren. In zogenaamde vector-notatie:

$$\mathbf{x}_P = (x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (2.4.23)$$

Meestal neemt men $x^0 = ct$, met t een tijd. (De factor c geeft x^0 de dimensie [lengte]). In een vlakke geometrie kunnen we voor de drie overblijvende (ruimtelijke) coördinaten gewone rechthoekige (cartesische) coördinaten gebruiken: $x^1 = x$, $x^2 = y$ en $x^3 = z$.

De positie van het punt P in de vier-dimensionale ruimte is dan volledig vastgelegd, en we kunnen schrijven:

$$\mathbf{x}_P = (ct, x, y, z). \quad (2.4.24)$$

Bekijk nu een dichtbijgelegen punt P' in deze vier-dimensionale ruimte. De coördinaten van dat punt zijn gegeven door:

$$\mathbf{x}_{P'} = (ct', x', y', z') \quad (2.4.25)$$

$$= (ct + c dt, x + dx, y + dy, z + dz).$$

met $dt \ll t$, $dx \ll x$, etc. Men definieert dan in een *vlakke* ruimte met vier dimensies (1× tijd en 3× ruimte) de afstand ds tussen de twee gebeurtenissen P en P' via de regel

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt^2 - d\ell^2. \quad (2.4.26)$$

In deze uitdrukking is $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ de afstand in de gewone drie-dimensionale vlakke ruimte, in feite de regel van Pythagoras.

Definitie (2.4.26) voor het vier-dimensionele afstandsrecept is vooral handig omdat men kan laten zien dat het een invariant is: iedere waarnemer krijgt hetzelfde antwoord. Het beste voorbeeld van deze invariantie is de relatie voor de afstand langs een fotonbaan. Omdat fotonen (in vacuüm) altijd met de lichtsnelheid lopen geldt langs de fotonbaan $d\ell = c dt$, en het afstandsrecept geeft:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\ell^2 = 0 .$$

Tot nu toe hebben we in het afstandsrecept gewone rechthoekige coördinaten x , y en z gebruikt. Men kan echter ook *bolcoördinaten* r , θ en ϕ gebruiken. Hier is r de afstand tot de oorsprong, en zijn θ en ϕ twee hoeken die de richting bepalen op een denkbeeldige bol met straal r rond de oorsprong. Hun relatie met de rechthoekige coördinaten x , y en z is

$$x = r \sin \theta \cos \phi , \quad y = r \sin \theta \sin \phi , \quad z = r \cos \theta . \quad (2.4.27)$$

Uitgedrukt met behulp van deze bolcoördinaten is de afstand ds tussen twee punten in de vier-dimensionale vlakke ruimte gegeven door:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (2.4.28)$$

Tot nu toe zijn wij uitgegaan van een *vaste*, vlakke ruimte. In een expanderende vlakke ruimte, waarin alle ruimtelijke afstanden evenredig zijn met de schaalfactor $R(t)$ zodat $d\ell \propto R(t)$, kan men de universele expansie in rekening brengen door bovenstaand afstandsrecept te vervangen door:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (2.4.29)$$

Nu zijn r , θ en ϕ zogenaamde *meebewegende coördinaten*. Voor een object dat passief wordt meegevoerd door de expansie van het heelal veranderen deze meebewegende coördinaten niet: vandaar de naam. In een *gekromde*, expanderende ruimte met krommingsconstante k wordt recept (2.4.29) vervangen door de zogenaamde *Robertson-Walker metriek*:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{\left(1 - \frac{kr^2}{c^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] . \quad (2.4.30)$$

Voor $k = 0$ vinden we het recept (2.4.29) voor een vlakke, expanderende ruimte terug. Voor $k \neq 0$ is de ruimte gekromd.

Kader 10: De andere Friedmann-vergelijking

We hebben het gedrag van de schaalfactor $R(t)$ afgeleid aan de hand van de vergelijking voor energiebehoud voor een test-sterrenstelsel met massa m , gelegen op de rand van een expanderende bol met uniforme dichtheid ρ en straal $r(t) = \varpi R(t)$, met ϖ een constante. Het stelsel beweegt onder invloed van de aantrekkende gravitatie van de massa M in de bol.

Nu is de wet van energiebehoud in een conservatief krachtveld in de Newtonse mechanica af te leiden uit de bewegingsvergelijking. De bewegingsvergelijking is daarom in principe equivalent. Zij luidt in dit geval:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (2.4.31)$$

Hier is wederom gebruikt dat de zwaartekrachtswerking van de massa in de bol hetzelfde is als die van een puntmassa M in de oorsprong $r = 0$. Gebruiken we nu

$$M = \frac{4\pi r^3 \rho}{3} \quad (2.4.32)$$

dan is de bewegingsvergelijking te schrijven als:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4\pi G m \rho r}{3}. \quad (2.4.33)$$

We nemen weer aan dat $r(t) = \varpi R(t)$. Dan volgt uit (2.4.33), na het uitdelen van een gemeenschappelijke factor $m\varpi$:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G \rho R}{3}. \quad (2.4.34)$$

Dit is een alternatieve vorm van Friedmann's vergelijking. Deze heeft uiteraard dezelfde oplossingen.

Vergeet niet dat de expansie van de bol de dichtheid doet afnemen: massabehoud geeft $\rho \propto R^{-3}$ voor koude materie (stof). Het minteken in het rechterlid van (2.4.33) betekent dat de expansie van het heelal vertraagt: $d^2 R/dt^2 < 0$.

Bij een discussie in Kader 6 en Kader 8 van het effect van de door Einstein geïntroduceerde kosmologische constante Λ is al opgemerkt dat men ook in Newton's theorie van de zwaartekracht een extra term kan opnemen met vergelijkbaar effect.

Men vervangt de massadichtheid ρ door

$$\rho \implies \rho - \frac{\Lambda}{4\pi G}. \quad (2.4.35)$$

Als we dat in vergelijking (2.4.34) ook doen vindt men

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G \rho R}{3} + \frac{\Lambda}{3} R. \quad (2.4.36)$$

Dit is inderdaad de relatie die men in de Algemene Relativiteitstheorie vindt. Men ziet dat een positieve kosmologische constante *versnellend* werkt, terwijl (zoals al betoogd) massa (via ρ) vertragend werkt.

Er zijn twee interessante gevallen die men aan de hand van vergelijking (2.4.36) direct kan behandelen:

- Het **statisch heelal** met $R = \text{constant}$ zodat $d^2 R/dt^2 = 0$. Dat is alleen mogelijk als

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G}. \quad (2.4.37)$$

Deze oplossing is de oplossing die Einstein vond en heet daarom het *Einstein heelal*.

- Een **leeg heelal** zodat $\rho = 0$, maar **met** positieve kosmologische constante Λ . In dat geval geldt:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{\Lambda}{3} R. \quad (2.4.38)$$

De expanderende oplossing van deze vergelijking correspondeert met het *de Sitter-heelal*:

$$R(t) = \text{constante} \times \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t\right). \quad (2.4.39)$$

Het de Sitter heelal is de enige oplossing met een echt constante Hubble-parameter:

$$H = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \equiv H_{\Lambda} . \quad (2.4.40)$$

Men kan in een de-Sitter heelal de schaalfactor dus ook schrijven als

$$R(t) \propto e^{H_{\Lambda} t} . \quad (2.4.41)$$

Het geval van het heelal met koude materie (zodat $\rho \propto R^{-3}$) **en** een kosmologische constante heet het *Friedmann-Lemaître heelal*. Deze oplossing wordt later in detail behandeld. Maar uit vergelijking (2.4.36) ziet men in ieder geval het volgende:

$$\rho > \frac{\Lambda}{4\pi G} : \quad \text{de expansie vertraagt;} \quad (2.4.42)$$

$$\rho < \frac{\Lambda}{4\pi G} : \quad \text{de expansie versnelt.}$$

Als het heelal met voldoende grote dichtheid wordt geboren ondergaat het dus eerst een vertraagde expansie, die op het moment waarop de materiedichtheid gelijk is aan $\rho = \Lambda/4\pi G$ omslaat naar een versnelde expansie. Ons heelal lijkt deze weg te hebben gevolgd, zoals blijkt uit waarnemingen aan verre supernovae. Momenteel versnelt de expansie van ons heelal weer.

Tenslotte: in een altijd expanderend heelal neemt de massadichtheid ρ voortdurend af. Als een dergelijk heelal ook een kosmologische constante heeft komt er uiteindelijk een moment dat $\rho \ll \Lambda/4\pi G$ en kan vergelijking (2.4.36) worden benaderd door vergelijking (2.4.38). Dat betekent dat een uiteindelijk de schaalfactor de de Sitter oplossing (2.4.39) volgt.

Relativistisch hete materie

In Newton's theorie is de lichtsnelheid formeel oneindig, en domineert dus de rustenergie mc^2 van iedere massa m : formeel is die oneindig groot. In de relativistische theorie is alle energie een bron van zwaartekracht. Men moet daarom het Newtoniaanse beeld corrigeren voor het feit dat ook de thermische energie van een gas (de energie van de warmtebeweging) een bron van equivalente massa is, en daarmee van zwaartekracht.

Men kan laten zien dat voor voldoende zwakke zwaartekrachtvelden (formeel: als de zwaartekrachtspotentiaal Φ voldoet aan $\Phi \ll c^2$) dit effect in rekening kan worden gebracht door de massadichtheid ρ in Newton's vergelijkingen te vervangen door een effectieve dichtheid:

$$\rho \implies \rho_{\text{eff}} = \rho + \frac{3P}{c^2}, \quad (2.4.43)$$

met P de druk in het gas. De Poisson vergelijking voor de zwaartekrachtspotentiaal Φ wordt daarmee:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_{\text{eff}} = 4\pi G \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right). \quad (2.4.44)$$

Voor koude materie is die correctie van ρ verwaarloosbaar klein en kan men $P \simeq 0$ gebruiken zodat $\rho_{\text{eff}} \simeq \rho$. Maar voor extreem relativistische deeltjes of fotonen kan men laten zien dat de correctie aanzienlijk is: in dat geval geldt

$$P = \frac{\rho c^2}{3} \iff \rho_{\text{eff}} = 2\rho. \quad (2.4.45)$$

De negatieve druk van donkere energie

Interessant genoeg kan men met de formele definitie van ρ_{eff} ook het wat ongebruikelijk ogend min-teken voor de term $\Lambda/4\pi G$ in regel (2.4.35) verklaren. We nemen (zoals gebruikelijk) aan dat $\Lambda > 0$. Voor de dichtheid ρ_Λ en druk P_Λ van donkere energie geldt:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \quad (2.4.46)$$

De daarbij horende effectieve dichtheid is daarom (net zoals de druk P_Λ) negatief:

$$\rho_{\text{eff } \Lambda} = -2\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda}{4\pi G}, \quad (2.4.47)$$

in overeenstemming met vergelijking (2.4.35).

De w -parameter

Het is soms handig om de vergelijkingen te schrijven in een vorm die gebruik maakt van de dimensieloze parameter

$$w \equiv \frac{P}{\rho c^2}. \quad (2.4.48)$$

Daarmee wordt de effectieve dichtheid in Poisson's vergelijking gelijk aan $\rho_{\text{eff}} = \rho (1 + 3w)$:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho (1 + 3w). \quad (2.4.49)$$

Tabel 3: dichtheid, druk en effectieve dichtheid

Component	dichtheid	druk	effectieve dichtheid	w -parameter
koude materie	ρ^{stof}	$P^{\text{stof}} = 0$	$\rho_{\text{eff}}^{\text{stof}} = \rho^{\text{stof}}$	0
straling	$\rho^{\text{straling}} = \frac{a_r T^4}{c^2}$	$P^{\text{straling}} = \frac{\rho^{\text{straling}} c^2}{3}$	$\rho_{\text{eff}}^{\text{straling}} = 2\rho^{\text{straling}}$	1/3
donkere energie	$\rho^{\text{vac}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$	$P^{\text{vac}} = -\rho^{\text{vac}} c^2$	$\rho_{\text{eff}}^{\text{vac}} = -2\rho^{\text{vac}}$	-1

De relatie tussen de stralingsdichtheid ρ^{straling} en de temperatuur T wordt bewezen in Hoofdstuk 3.

2.5 Nogmaals de roodverschuiving

Onze afleiding van de roodverschuiving met behulp van het Doppler effect moet subtiel worden veranderd. De reden is als volgt: in de afleiding gaan we uit van de beweging van de bron (ten opzichte van de stilstaande waarnemer) door de ruimte. In de ART bewegen typische (representatieve) sterrenstelsels niet door de ruimte, maar is het de ruimte zelf die uitzet, waardoor de onderlinge afstand tussen sterrenstelsels toeneemt. In zekere zin staan de sterrenstelsels dus stil, en is het onze voorkeur om (net zoals Newton) te denken in termen van een onveranderlijke, vaste ruimte die ons Hubble's waarnemingen laat interpreteren als een beweging.

Echter, men kan ook laten zien dat de klassieke zienswijze en de correcte relativistische zienswijze in principe hetzelfde resultaat opleveren *mits* men zich beperkt tot kleine afstanden (zodat de kromming van het heelal vrijwel geen invloed heeft) en korte tijdsintervallen (zodat de *verandering* in de expansiesnelheid $\propto d^2R/dt^2$ kan worden verwaarloosd).

Bekijk een foton, uitgezonden op tijdstip t_{em} (emissietijdstip) met de laboratoriumgolflengte λ_{lab} . Op een (voldoend kleine) afstand ΔD , een korte tijd Δt later, vangt een waarnemer het foton op met golflengte λ_{obs} . Het ontvangstijdstip is dus $t_o = t_{em} + \Delta t$.

Omdat licht zich altijd met de lichtsnelheid voortplant geldt bovendien

$$D = c \Delta t . \quad (2.5.1)$$

We nemen nu aan dat tijdens de reis van het foton de golflengte *geleidelijk* langer wordt: op een willekeurig tijdstip $t_{em} \leq t \leq t_o$ is de golflengte $\lambda(t)$, met

$$\lambda(t_{em}) = \lambda_{lab} \quad , \quad \lambda(t_o) = \lambda(t_{em} + \Delta t) = \lambda_{obs} . \quad (2.5.2)$$

Door de expansie van het heelal heeft de bron van het foton een vluchtsnelheid $V = HD$. De Doppler-interpretatie (1.5.22) geeft dan m.b.v. (2.5.1):

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}} = \frac{V}{c} = \frac{HD}{c} = H \Delta t . \quad (2.5.3)$$

Vanwege de aanname van kleine Δt kunnen we schrijven:

$$\frac{\lambda_{obs} - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}} = \frac{\lambda(t_{em} + \Delta t) - \lambda(t_{em})}{\lambda(t_{em})} \simeq \left(\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right)_{t_{em}} \Delta t . \quad (2.5.4)$$

Bovendien geldt (zie relatie 2.3.12 voor $H(t)$), wederom voor voldoende kleine Δt :

$$H = \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)_{t_o} \simeq \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)_{t_{em}} . \quad (2.5.5)$$

Met deze relaties is (2.5.3) te schrijven als:

$$z = \left(\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right)_{t_{em}} \Delta t = \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)_{t_{em}} \Delta t. \quad (2.5.6)$$

Dit moet geldig zijn voor een willekeurig uitzendtijdstip t_{em} . Dit is alleen mogelijk als meer in het algemeen geldt dat

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = H = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}. \quad (2.5.7)$$

De oplossing van deze vergelijking² is $\lambda(t) = \text{constante} \times R(t)$, zodat geldt:

$$\lambda(t) = \lambda_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right).$$

(2.5.8)

De golflengte van een foton in een uitdijend heelal is evenredig met de schaalfactor, en de roodverschuiving wordt dus tijdens de reis van het foton opgebouwd!

Minstens zo belangrijk is de relatie die uit (2.5.8) volgt voor de roodverschuiving van een foton op een willekeurig moment $t \geq t_{em}$:

$$z(t) = \frac{\lambda(t) - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}} = \frac{\lambda(t) - \lambda(t_{em})}{\lambda(t_{em})} = \frac{R(t)}{R(t_{em})} - 1. \quad (2.5.9)$$

Dit is de relatie die sterrenkundigen gebruiken om de waargenomen roodverschuiving van een foton om te rekenen naar een emissie-tijdstip, en vervolgens naar een bronafstand op het moment van ontvangst. Het antwoord van de berekening hangt natuurlijk af van het gebruikte heelalmodel dat het gedrag van $R(t)$ bepaalt.

²Check dat zelf eens!

Hoofdstuk 3

Materie en straling in een uitdijend heelal

3.1 Verdunning en afkoeling

Bekijk een met het heelal mee-expanderend volume $\mathcal{V}(t)$, bijvoorbeeld een kubus met ribbe L en volume $\mathcal{V} = L^3$. Door de expansie van het heelal neemt de lengte van iedere ribbe toe volgens relatie (2.2.3):

$$L(t) = L_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right), \quad (3.1.1)$$

en groeit het volume als

$$\mathcal{V}(t) = L^3(t) = L_0^3 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^3 = \mathcal{V}_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^3. \quad (3.1.2)$$

Een doorsnee volume bevat, als er geen deeltjes bij worden gemaakt, een constant aantal deeltjes. Weliswaar vliegen er deeltjes het volume uit door hun thermische beweging, maar -gemiddeld gesproken- vliegen er in een homogeen heelal per seconde evenveel deeltjes van buiten het volume weer in. Als het aantal deeltjes in het volume gelijk is aan N blijft deze grootte dus constant. De deeltjesdichtheid n , het aantal deeltjes per volume-éénheid, gedraagt zich daarom in een expanderend heelal als:

$$n(t) = \frac{\text{aantal deeltjes}}{\text{volume}} = \frac{N}{\mathcal{V}(t)} = \frac{N}{\mathcal{V}_0} \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3} = n_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3}. \quad (3.1.3)$$

Deze *verdunningswet* is geldig zolang er geen processen zijn die deeltjes creëren of omgekeerd juist deeltjes vernietigen.

De verdunningswet stelt ons in staat om uit te rekenen hoe de massadichtheid ρ zich gedraagt. We bekijken twee belangrijke limieten: het geval van koude materie, in de kosmologie vaak *stof* genoemd, en het geval van zeer hete materie, vaak *straling* genoemd. De belangrijkste eigenschappen staan in Tabel 3.

Het onderscheid tussen stof en straling heeft te maken met de relatie tussen deeltjesenergie \mathcal{E} en de (grootte) van de deeltjesimpuls p . De impuls is een maat voor de hoeveelheid beweging van een deeltje: zo bepaalt het de stoot die je voelt als je door het deeltje wordt getroffen. Zie **Kader 11** hieronder.

De relativiteitstheorie heeft de relatie tussen deeltjesenergie \mathcal{E} en impuls p als:

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} . \quad (3.1.4)$$

Dit is de totale energie van een deeltje met massa m , inclusief de rust-energie (de energie $\mathcal{E} = mc^2$ voor $p = 0$). Er zijn nu twee grensgevallen, die volgen uit een benadering voor de exacte relatie (3.1.4):

$$\mathcal{E} \simeq \begin{cases} mc^2 & \text{stof: } p \ll mc , \\ pc & \text{straling: } p \gg mc . \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Voor stof, ‘zware’ deeltjes die zich bewegen met een snelheid veel kleiner dan de lichtsnelheid, is vrijwel alle energie de rustenergie mc^2 die is geassocieerd met de rustmassa m van het deeltje¹. Voor straling, relativistische deeltjes die zich bewegen met een snelheid dicht bij de lichtsnelheid, speelt de rustmassa m vrijwel geen rol. Vrijwel alle energie is in dit geval bewegingsenergie, geassocieerd met de impuls p . Fotonen zijn massalozes deeltjes: $m_{\text{foton}} = 0$. Voor fotonen is de relatie $\mathcal{E} = pc$ dus *exact*, en dat is de reden waardoor de limiet $p \gg mc$ de stralingslimiet wordt genoemd.

Stof (koude materie)

De massadichtheid van stof is simpelweg de deeltjesdichtheid \times de rustmassa, en gedraagt zich dus als (zie 3.1.3):

$$\begin{aligned} \rho^{\text{stof}} &= n^{\text{stof}}(t) m = n_0^{\text{stof}} m \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3} \\ &= \rho_0^{\text{stof}} \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3} . \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Dit komt overeen met relatie (2.4.13) die we eerder gebruikten bij de afleiding van de Friedmannvergelijking. Daar vonden we $\rho \propto r^{-3}$, met $r = \text{constante} \times R(t)$, zodat je net zo goed kunt schrijven $\rho \propto R^{-3}$.

¹Dit is de bron van de zo vaak geciteerde relatie $E = mc^2$. We schrijven hier \mathcal{E} in plaats van E voor de deeltjesenergie.

Kader 11: Energie, impuls en snelheid

In de relativiteitstheorie is de energie van een deeltje met rustmassa m en impuls p gelijk aan

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} . \quad (3.1.7)$$

Deze relatie wordt vaak geschreven als

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 , \quad (3.1.8)$$

met γ de *Lorentz factor*:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} . \quad (3.1.9)$$

De grootte van de impuls is in termen van de deeltjessnelheid v gelijk aan

$$p = \gamma mv . \quad (3.1.10)$$

Hieruit volgt dat de Lorentz factor ook te schrijven is als

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (3.1.11)$$

Omdat $\gamma = \mathcal{E}/mc^2$ kan men de snelheid uitdrukken in termen van p en \mathcal{E} :

$$v = \frac{pc^2}{\mathcal{E}} . \quad (3.1.12)$$

Het voordeel van deze schrijfwijze is dat hij altijd geldt: zowel voor massieve deeltjes als voor massalozes deeltjes, en voor alle snelheden $v \leq c$.

Massieve deeltjes in rust ($v = 0$) hebben $p = 0$, $\gamma = 1$ en $\mathcal{E} = mc^2$. Massieve deeltjes bewegen steeds sneller als hun energie toeneemt, maar sneller dan het licht kunnen ook zij niet: in de stralingslimiet, $p \gg mc$ zodat $\mathcal{E} \approx pc$ geldt ook voor massieve deeltjes dat $v \approx c$.

Massalozes deeltjes, zoals fotonen, hebben $m = 0$, $v = c$ en $\mathcal{E} = pc$. Zij bewegen altijd met de lichtsnelheid, ongeacht hun energie!

Straling

Bekijk nu het geval van straling. Fotonen hebben volgens de quantummechanica een impuls $p = h/\lambda$ en een energie $\mathcal{E} = pc = hc/\lambda$. Door de roodverschuiving neemt de golflengte van ieder foton in een uitdijend heelal toe, ($\lambda \propto R$). De energie per foton neemt dus af:

$$\mathcal{E}_{\text{foton}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-1} = \mathcal{E}_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-1}. \quad (3.1.13)$$

In de relativiteitstheorie is energie de bron van zwaartekracht, dus moet men aan een foton met energie \mathcal{E} een effectieve massa $m_{\text{eff}} = \mathcal{E}/c^2$ toekennen. De effectieve massadichtheid van fotonen is dus $\rho^{\text{foton}} = n^{\text{foton}} \mathcal{E}_{\text{foton}}/c^2$. De verdunningswet $n \propto R^{-3}$ (vergelijking 3.1.3) geldt ook voor fotonen. Daarom gedraagt de effectieve massadichtheid van een fotongas in een expanderend heelal zich onder de gecombineerde invloed van verdunning en roodverschuiving als

$$\begin{aligned} \rho^{\text{straling}} &= n^{\text{straling}}(t) \frac{\mathcal{E}(t)}{c^2} = \frac{n_0^{\text{straling}} \mathcal{E}_0}{c^2} \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-4} \\ &= \rho_0^{\text{straling}} \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-4}. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Men kan laten zien dat dit voor *alle* soorten deeltjes geldt in de stralingslimiet, d.w.z. als $p \gg mc$, zelfs als de rustmassa van het betrokken deeltje niet nul is.

Een directe toepassing

Als men ons huidig heelal inventariseert blijkt dat straling en koude materie (stof) een massadichtheid hebben gelijk aan

$$\rho_0^{\text{stof}} \simeq 2.7 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^{-3}, \quad \rho_0^{\text{straling}} \simeq 9.7 \times 10^{-31} \text{ kg/m}^{-3}. \quad (3.1.15)$$

De stralingsdichtheid is nu verwaarloosbaar klein. Echter, in het verleden was dat niet het geval. Als we terugrekenen naar het vroege heelal ($R \ll R_0$) is er een schaalfactor R_g waarbij de dichtheid van straling en materie gelijk zijn. De reden is dat de stralingsdichtheid naar het verleden toe sneller toeneemt dan de stofdichtheid. Uit de voorwaarde $\rho^{\text{straling}} = \rho^{\text{stof}}$ volgt met de vergelijkingen (3.1.6) en (3.1.14):

$$\frac{R_g}{R_0} = \frac{\rho_0^{\text{straling}}}{\rho_0^{\text{stof}}} \simeq 3.6 \times 10^{-4}. \quad (3.1.16)$$

Dit betekent dat ons heelal voor $R < R_g$ door straling werd gedomineerd. Meer algemeen: ieder heelal dat gevuld is met zowel straling als stof zal, ver genoeg in het verleden, een fase hebben gekend waar de dichtheid van straling bepaalt hoe snel het heelal expandeert. Uiteindelijk neemt stof (of de dichtheid van het vacuüm: *donkere energie*) die rol over.

3.2 Thermisch evenwicht en de stalingstemperatuur

Als de deeltjesdichtheid voldoende groot is, en de tijd tussen deeltje-deeltje botsingen heel kort is vergeleken met de leeftijd van het heelal, dan stelt zich een situatie van *Thermisch Evenwicht* (TE) in. In zo'n situatie geldt voor puntdeeltjes²:

$$\text{gemiddelde bewegingsenergie} \simeq k_b T \quad [J], \quad (3.2.1)$$

met $k_b = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K de Boltzmann constante en T de temperatuur in Kelvin (K).

Voor fotonen is alle energie bewegingsenergie. De typische golflengte λ_T van de fotonen in een fotongas in thermisch evenwicht bij temperatuur T volgt daarom uit:

$$\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda_T} \simeq k_b T \iff \lambda_T \simeq \frac{hc}{k_b T}. \quad (3.2.2)$$

Deze relatie stelt ons in staat de eigenschappen van een fotongas in thermisch evenwicht te schatten.

De statistische fysica van gassen vertelt ons voor het fotongas dat er in TE een paar fotonen zitten in een volume ter grootte λ_T^3 , zodat de typische dichtheid van fotonen bij een temperatuur T gelijk moet zijn aan:

$$n_{\text{foton}}(T) \simeq \frac{1}{\lambda_T^3} = \left(\frac{k_b T}{hc} \right)^3 \quad [\text{m}^{-3}]. \quad (3.2.3)$$

De energiedichtheid $\varepsilon = \rho c^2$ van ieder gas is

$$\varepsilon = (\text{deeltjesdichtheid}) \times (\text{energie per deeltje}). \quad (3.2.4)$$

Toegepast op het thermisch fotongas geeft dit:

$$\varepsilon_{\text{foton}}(T) = \frac{k_b T}{\lambda_T^3} = \frac{(k_b T)^4}{(hc)^3} \quad [\text{J m}^{-3}]. \quad (3.2.5)$$

Kader 12 geeft een wat preciesere berekening voor een fotongas.

²De preciese relatie voor niet-relativistische puntdeeltjes met massa m is $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \frac{3}{2} k_b T$, met $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_{\text{th}}^2$ de kinetische energie van de thermische beweging, en $v_{\text{th}} = \sqrt{3k_b T/2m}$ de thermische snelheid.

3.3 Thermisch stralingsgas

Kosmologen spreken van een stralingsgas als er veel deeltjes zijn (niet alleen fotonen) die voldoen aan $p \gg mc$. De massadichtheid van een stralingsgas (dat zich gedraagt als een fotongas) in TE is dus ongeveer *per deeltjessoort*:

$$\rho(T) = \frac{\varepsilon(T)}{c^2} \simeq \frac{(k_b T)^4}{h^3 c^5} \text{ [kg m}^{-3}\text{]}. \quad (3.3.1)$$

Hoeveel deeltjessoorten zich als straling gedragen hangt af van hun rustmassa: gegeven een rustmassa m moet gelden dat hun bewegingsenergie véél groter is dan de rustenergie:

$$k_b T \gg mc^2. \quad (3.3.2)$$

Als er N deeltjessoorten zijn die aan dat criterium voldoen dan is de *exacte* uitdrukking voor de totale stralingsdichtheid:

$$\rho^{\text{straling}} = \frac{\pi^2 g_* k_b T}{30 c^2} \left(\frac{k_b T}{\hbar c} \right)^3. \quad (3.3.3)$$

Hier is $\hbar \equiv h/2\pi = 1.0546 \times 10^{-34}$ J s en is $g_* \sim N$ een factor die de bijdrage van alle deeltjessoorten telt. Deze uitdrukking volgt de schaling voorspeld door (3.2.4).

3.4 Kosmische afkoeling

De eigenschappen van een thermisch gas van fotonen (en andere relativistische deeltjes in de stralingslimiet) in een expanderend heelal zijn:

typische golflengte straling

(roodverschuivingswet): $\lambda \propto R$ en $\lambda \simeq \lambda_T \propto T^{-1}$,

deeltjesdichtheid stralingsgas

(verdunningswet): $n^{\text{straling}} \propto R^{-3}$ en $n^{\text{straling}} \propto T^3$,

massadichtheid stralingsgas: $\rho^{\text{straling}} \propto R^{-4}$ en $\rho^{\text{straling}} \propto T^4$.

Deze drie relaties kunnen alleen simultaan gelden als de stralingstemperatuur omgekeerd evenredig is met de schaalfactor: $T \propto R^{-1}$. Men kan schrijven:

$$T(t) = T_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-1}. \quad (3.4.1)$$

In een uitdijend heelal neemt de stralingstemperatuur (en daarmee de bewegingsenergie per stralingsdeeltje) continu af.

Tabel 4: Eigenschappen van stof en straling in een uitdijend heelal

Eigenschap	stof	straling
Energie $\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$	rustenergie $\simeq mc^2 = \text{constant}$	bewegingsenergie $\simeq pc \propto R^{-1}$
Impuls p	$p \simeq mv \ll mc$	$p \sim \frac{\mathcal{E}}{c} \gg mc$
Deeltjessnelheid v	$v \ll c$	$v \simeq c$
Deeltjesdichtheid	$n \propto R^{-3}$	$n \propto R^{-3}$
Massadichtheid	$\rho \propto R^{-3}$	$\rho \propto R^{-4}$
Temperatuur gas in TE	$k_b T \ll mc^2$	$k_b T \gg mc^2$

Een deeltjessoort hoort bij het stof als de rustenergie veel groter is dan de bewegingsenergie,

$$mc^2 \gg k_b T, \quad (3.4.2)$$

maar gedraagt zich als straling als

$$mc^2 \ll k_b T. \quad (3.4.3)$$

Omdat de temperatuur in het heelal voortdurend daalt gedragen alle deeltjes zich in het zeer vroege heelal als straling, maar komt er voor massieve deeltjes altijd een moment waarop de temperatuur zo laag wordt dat zij zich als stof gaan gedragen. Voor zware deeltjes gebeurt dat eerder dan voor lichte deeltjes. Bovenstaand criterium vertelt ons dat het omslagmoment valt bij een temperatuur ongeveer gelijk aan

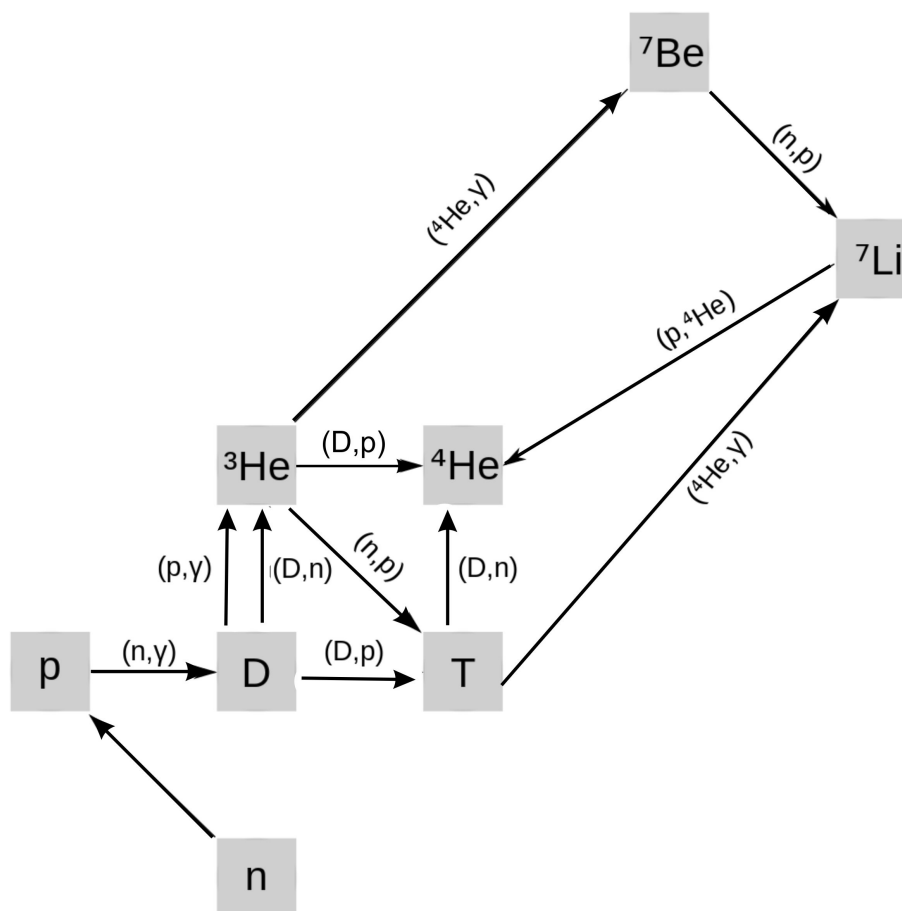
$$T \simeq T_m = \frac{mc^2}{k_b} \quad (3.4.4)$$

Fysisch is de dalende temperatuur in een expanderend heelal makkelijk te begrijpen: een gas dat uitzet, waardoor de dichtheid afneemt, koelt ook af. Dit proces heet *adiabatische afkoeling*. In een uitdijend heelal wordt er door de uitzetting van de ruimte zelf voortdurend volume bijgemaakt, waardoor de dichtheid wel moet afnemen (de verdunningswet), met afkoeling als gevolg.

Deze situatie is analoog aan wat gebeurt als gas ontsnapt uit een spuitbus: het in de spuitbus achterblijvend gas heeft per molecuul meer ruimte ter beschikking, en koelt af. Voor de fysica van het vroege heelal is deze combinatie van verdunning en afkoeling van groot belang. Het betekent immers dat ons heelal in het verre verleden veel dichter en veel heter was. Dat heeft een tweetal directe gevolgen:

1. In het jonge heelal heersten gedurende een periode van ongeveer 10 minuten een dichtheid en temperatuur die vergelijkbaar zijn met de dichtheid/temperatuur in het centrum van de Zon of andere sterren. Door de veelvuldige botsingen was de temperatuur van materie en van fotonen aan elkaar gelijk. Net zoals in onze Zon vond in die periode *kernfusie* plaats, waarbij 25% van het aanwezige massa waterstof werd omgevormd naar Helium. Dit is de periode van de **Voorwereldlijke Nucleosynthese**. In 1948 werd deze mogelijkheid voor het eerst geopperd. De gedetailleerde berekeningen volgden in 1957 (door Burbidge, Burbidge, Fowler & Hoyle en door Cameron). De figuur op de volgende pagina geeft een aantal stappen in de waterstofcyclus van kernverbranding.
2. Zolang het heelal heter is dan ongeveer 4500 K is waterstof volledig of gedeeltelijk geïoniseerd. De meeste bij iedere waterstofkern horende elektronen vliegen dan vrij rond. Losse elektronen verstrooien licht zeer effectief, te vergelijken met wat er gebeurt met licht op een mistige dag als het wordt verstrooid door kleine waterdruppeltjes in de atmosfeer. Het gevolg van deze verstrooiing is dat het heelal ondoorzichtig is. Pas toen de de temperatuur voldoende ver was gedaald werd de ionisatiegraad van waterstof erg laag, en trok (bij gebrek aan vrije elektronen) als het ware de mist op: het heelal werd doorzichtig. Echter, de toen aanwezige fotonen werden nadien nergens meer door gehinderd. Deze fotonen bestaan ook vandaag nog steeds, en vormen samen de **Kosmische Achtergrondstraling**: een thermisch fotongas met een temperatuur van ~ 2.7 K. Deze kosmische achtergrondstraling werd in 1964 bij toeval ontdekt door Penzias en Wilson.

Het bestaan van de Kosmische Achtergrondstraling, plus het feit dat materie in het heelal dat -voor zover wij weten- nooit in sterren heeft gezeten (en daarom geen stellaire kernfusie heeft ondergaan) voor 25% in gewicht uit helium bestaat, vormen twee belangrijke aanwijzingen dat ons heelal inderdaad een heet begin heeft gekend, een essentiële gevolg van het Oerknalmodel.



γ = foton, n = neutron, p = proton, D = ^2H , T = ^3H

notatie: (n, γ) = n in, γ uit

Figuur 3.1: De eerste stappen in de waterstofverbrandingscyclus. Hierin wordt vooral helium gevormd, en sporen van deuterium, lithium en beryllium. Deze cyclus vindt gedurende iets meer dan tien minuten plaats in het vroege heelal. Dezelfde cyclus is grotendeels verantwoordelijk voor de energieproductie in de kern van de Zon.

Kader 12: Het Planck spectrum van een thermisch fotongas

Een individueel foton met frequentie ν heeft een energie $\mathcal{E} = h\nu$, met h de constante van Planck. Een gas van fotonen in thermische evenwicht met een temperatuur T heeft een karakteristieke frequentieverdeling die bekend staat als het *Planck spectrum* of het *Zwarte Straler spectrum*. In dit spectrum is de foton-dichtheid (het aantal fotonen per volume eenheid) in een frequentieband $\Delta\nu \ll \nu$ gegeven door:

$$\Delta n_{\text{fot}} = \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_b T} - 1}. \quad (3.4.5)$$

De energiedichtheid van de fotonen in een smalle frequentieband $\Delta\nu$ is simpelweg het aantal fotonen \times energie per foton:

$$\Delta(\rho_{\text{fot}}c^2) = \Delta n_{\text{fot}} \mathcal{E} = \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_b T} - 1}. \quad (3.4.6)$$

De totale foton-dichtheid n_{fot} en de bijbehorende energiedichtheid $\rho_{\text{fot}}c^2$ volgt dan uit een integratie over alle frequenties:

$$n_{\text{fot}} = \int_0^\infty d\nu \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_b T} - 1}, \quad (3.4.7)$$

en

$$\rho_{\text{fot}}c^2 = \int_0^\infty d\nu \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_b T} - 1}. \quad (3.4.8)$$

Hoe deze twee grootheden zich gedragen als functie van de temperatuur is simpel in te zien. We voeren de dimensieloze grootheid

$$x \equiv \frac{h\nu}{k_b T}, \quad (3.4.9)$$

de fotonenergie in eenheden van de thermische energie $k_b T$. Dan geldt $\nu = (k_b T/h)x$ en zijn bovenstaande integralen voor n_{fot} en $\rho_{\text{fot}}c^2$ te schrijven als:

$$n_{\text{fot}}(T) = \left(\frac{k_b T}{\hbar c}\right)^3 \mathcal{I}_0, \quad \rho_{\text{fot}}(T)c^2 = \left(\frac{k_b T}{\hbar c}\right)^3 k_b T \mathcal{I}_1, \quad (3.4.10)$$

met $\hbar = h/2\pi$. Hier definiëer ik de volgende familie integralen:

$$\mathcal{I}_n \equiv \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^{n+2} dx}{e^x - 1}, \quad (3.4.11)$$

dimensieloze getallen. Een berekening van de twee integralen \mathcal{I}_0 en \mathcal{I}_1 levert:

$$n_{\text{fot}}(T) = \frac{2,404}{\pi^2} \left(\frac{k_b T}{\hbar c} \right)^3 \approx 2 \times 10^7 T^3 \text{ m}^{-3}, \quad (3.4.12)$$

$$\rho_{\text{fot}}(T)c^2 = \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{k_b T}{\hbar c} \right)^3 k_b T \equiv a_r T^4 \text{ J m}^{-3}.$$

Hierin is $a_r \equiv \pi^2 k_b^4 / 15 \hbar^3 c^3 = 7,56 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$ de *stralingsconstante*.

Kosmologische consequenties

Door de roodverschuiving in een expanderend heelal neemt de golflengte van fotonen toe als $\lambda \propto R$, met $R(t)$ de schaalfactor van het heelal. Dat betekent dat de typische fotonenergie afneemt als $\mathcal{E} = h\nu = hc/\lambda \propto R^{-1}$. Als fotonen in een thermische verdeling blijven, zodat voor een ‘gemiddeld foton’ geldt dat $h\nu \sim k_b T$, dan verwacht je dat $T \propto R^{-1}$. Hetzelfde resultaat vindt men als men aanneemt dat het aantal fotonen is behouden zodat de verdunningswet geldt voor de foton dichtheid: $n_{\text{fot}} \propto R^{-3}$. Omdat in een Planck spectrum geldt dat $n_{\text{fot}} \propto T^3$ impliceert dit weer dat $T \propto R^{-1}$. De conclusie is dan ook:

$$\text{de foton-temperatuur daalt als } T = T_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-1}.$$

(3.4.13)

Omdat de energiedichtheid van thermische fotonen schaalt als $\rho_{\text{fot}} c^2 \propto T^4$ volgt dan meteen:

$$\rho_{\text{fot}}(T)c^2 = \rho_{\text{fot}}(T_0)c^2 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-4}. \quad (3.4.14)$$

De snelle afname van de energiedichtheid van thermische fotonen is het gecombineerde effect van de verdunning van de fotondichtheid (een factor $(R/R_0)^{-3}$) en de afname van de energie per foton (een factor $(R/R_0)^{-1}$).

3.5 Een beetje thermodynamica

Een vraag die vaak opkomt in verband met de roodverschuiving van straling, en het feit dat de energie van straling in een mee-expanderend volume $\mathcal{V} \propto R^3$ ten gevolge van roodverschuiving afneemt volgens

$$E = \rho^{\text{straling}} c^2 \mathcal{V} \propto R^{-1}, \quad (3.5.1)$$

is de vraag waar die energie dan blijft. Hoe zit dan het met energiebehoud?

Het antwoord op die vraag komt uit de thermodynamica. Bekijk een infinitesimaal klein volume \mathcal{V} in een expanderend heelal. Het voldoet aan relatie (3.1.2):

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^3. \quad (3.5.2)$$

De energie in dit volume is

$$E = \rho c^2 \mathcal{V}. \quad (3.5.3)$$

Thermodynamica van gassen vertelt ons dat deze energie verandert volgens één van de thermodynamische hoofdwetten:

$$dE = dQ - P d\mathcal{V}. \quad (3.5.4)$$

Hier is dQ de *toegevoegde warmte* uit externe bronnen, en is P de druk. Het symbool dQ betekent een kleine verandering in een grootheid Q . In het heelal zijn er géén externe warmtebronnen. Bovendien is vanwege de homogeniteit de hoeveelheid warmte die het volume uit de omgeving instroomt gemiddeld gesproken gelijk aan wat er uitstroomt. Dit betekent dat $dQ = 0$ zodat we (3.5.4) mogen vervangen door de *adiabatische wet* $dE = -P d\mathcal{V}$: de energie *neemt af* door de arbeid verricht door drukkkrachten tijdens de expansie, althans zolang de druk P positief is.

Er geldt daarom:

$$\boxed{dE + P d\mathcal{V} = 0 .} \quad (3.5.5)$$

We gebruiken nu (3.5.3) voor dE en schrijven voor het gemak

$$P = w \rho c^2 , \quad (3.5.6)$$

gebruikmakend van de w -parameter die in **Kader 10** werd geïntroduceerd. De relatie (3.5.5) wordt dan:

$$d(\rho c^2 \mathcal{V}) + w \rho c^2 d\mathcal{V} = 0 . \quad (3.5.7)$$

Voor kleine veranderingen geldt, analoog aan de productregel bij differentiatie:

$$d(\rho c^2 \mathcal{V}) = c^2 (d\rho) \mathcal{V} + \rho c^2 d\mathcal{V} . \quad (3.5.8)$$

Daarmee wordt (3.5.7), na het uitdelen van een gemeenschappelijke factor c^2 :

$$\mathcal{V} d\rho + \rho (1 + w) d\mathcal{V} = 0 . \quad (3.5.9)$$

Delen wij deze uitdrukking door $\rho \mathcal{V}$ dan volgt:

$$\frac{d\rho}{\rho} + (1 + w) \frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = 0 . \quad (3.5.10)$$

Nu geldt voor kleine veranderingen³

$$\frac{d\rho}{\rho} = d(\ln \rho) , \quad \frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = d(\ln \mathcal{V}) , \quad (3.5.11)$$

zodat bovenstaande relatie voor constante w equivalent is met

$$d(\ln \rho) + (1 + w) d(\ln \mathcal{V}) = d(\ln [\rho \mathcal{V}^{1+w}]) = 0 . \quad (3.5.12)$$

³Dit volgt uit de relatie $df(x) = f(x + dx) - f(x) = (df/dx) dx$ voor de infinitesimale verandering een functie $f(x)$ ten gevolge van een verandering dx in het argument van de functie.

Als $dQ = 0$ moet Q constant zijn. In dit geval vinden we dus:

$$\rho \mathcal{V}^{1+w} = \text{constant} \iff \rho = \rho_0 \left(\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}_0} \right)^{-(1+w)}. \quad (3.5.13)$$

In een uitdijend heelal geldt dat het ieder volume toeneemt volgens wet (3.5.2), en de dichtheid ρ neemt af als

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3(1+w)}. \quad (3.5.14)$$

Een aantal eerder gevonden resultaten worden door deze dichtheidswet gerepresenteerd, maar het leidt ook tot nieuwe inzichten:

- **Stof:** voor stof (koude materie) geldt $P = 0$, $w = 0$ en geeft (3.5.14)

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3},$$

het correcte resultaat. De totale energie $E = \rho \mathcal{V}$ in een expanderend volume is nu constant: de rustenergie van alle deeltjes in dit volume.

- **Straling:** voor straling geldt $P = \rho c^2/3$, $w = 1/3$. Dan geeft (3.5.14)

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-4},$$

zoals eerder op andere wijze afgeleid. De totale energie van straling in het volume neemt af als $E = \rho c^2 \mathcal{V} \propto R^{-1}$ door de roodverschuiving.

- **Donkere energie:** de klassieke donkere energie heeft een constante dichtheid $\rho = \Lambda/8\pi G = \rho^{\text{vac}}$. Een constante dichtheid impliceert vanwege (3.5.14) dat $w = -1$ zodat

$$P = w \rho c^2 = -\rho^{\text{vac}} c^2.$$

De druk van donkere energie is negatief! Men zou kunnen tegenwerpen dat donkere energie geen gas is. Het blijkt echter dat dit resultaat correct is als men de equivalente druk van donkere energie uitrekent met behulp van quantumveldentheorie.

De consequentie van de negatieve druk is dat de totale energie van een expanderend volume *toeneemt* in plaats van afneemt: $-P d\mathcal{V}$ is positief! In dit geval geldt $E = \rho^{\text{vac}} c^2 \mathcal{V} \propto R^3$.

Hoofdstuk 4

Friedmann modellen

4.1 Algemene vorm van Friedmann's vergelijking

De meest algemene vorm van de Friedmann vergelijking, inclusief de door Einstein geïntroduceerde kosmologische constante Λ (zie **Kader 10**) luidt:

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{R^2}. \quad (4.1.1)$$

Hier is definitie (2.3.12) gebruikt voor de Hubble-parameter $H(t)$. De dichtheid ρ is de massadichtheid van stof en straling:

$$\rho = \rho^{\text{stof}} + \rho^{\text{straling}}. \quad (4.1.2)$$

Het is ook mogelijk om de kosmologische constante te interpreteren als het gevolg van een vacuümdichtheid:

$$\Lambda = 8\pi G \rho^{\text{vac}} \quad (4.1.3)$$

zodat vergelijking (4.1.1) wordt:

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho^{\text{stof}} + \rho^{\text{straling}} + \rho^{\text{vac}}) - \frac{k}{R^2}. \quad (4.1.4)$$

De dichtheid ρ^{vac} is de massadichtheid die over blijft als men alle materie en alle straling uit het heelal zou verwijderen.

In de simpelste toepassingen is ρ^{vac} constant, maar er zijn ook modellen waarin de vacuüm-dichtheid varieert. De interpretatie van de kosmologische constante als een massadichtheid van het vacuüm werd voor het eerst gegeven door Georges Lemaître.

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat stof (koude materie) en straling (zeer hete materie) zich anders gedragen: hun dichtheid varieert respectievelijk als $\rho^{\text{stof}} \propto R^{-3}$ en $\rho^{\text{straling}} \propto R^{-4}$. Dat gedrag beïnvloedt de expansie van het heelal. We bekijken eerst de vlakke modellen met $k = 0$, simpelweg omdat daar de oplossingen van Friedmann's vergelijking eenvoudig te vinden zijn. Bovendien: de waarnemingen vertellen ons dat het heelal (vrijwel) vlak is.

4.2 Vlakke heelalmodellen: $k = 0$

We bekijken eerst modellen zonder een kosmologische constante ($\Lambda = \rho^{\text{vac}} = 0$). We nemen bovendien aan dat hetzij stof, hetzij straling de dominante bijdrage aan de dichtheid geven. Beide gevallen kunnen worden gevangen met de formule

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-n}, \quad \text{met } n = \begin{cases} 3 & \text{voor stof,} \\ 4 & \text{voor straling.} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Friedmann's vergelijking wordt dan:

$$H^2 = \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-n}. \quad (4.2.2)$$

Vergelijkingen van dit type kunnen simpel worden opgelost als men zich realiseert dat de snelheid van de uitzetting, dR/dt , varieert als een macht van R :

$$\frac{dR}{dt} \propto R^\beta \quad \text{met } \beta = \frac{2-n}{2}. \quad (4.2.3)$$

Dat kan alleen als $R(t)$ een macht is van t , zodat men de volgende probeeroplossing kan gebruiken:

$$R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^\alpha. \quad (4.2.4)$$

In dat geval geldt:

$$\frac{dR}{dt} = R_0 \left(\frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_0^\alpha} \right) = \frac{\alpha R_0}{t_0} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\alpha-1}. \quad (4.2.5)$$

De Hubble parameter volgt als

$$H = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{\alpha}{t}, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-n\alpha}. \quad (4.2.6)$$

Vullen we dit in vergelijking (4.2.2) in dan krijgen we:

$$\left(\frac{\alpha}{t} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{n\alpha}. \quad (4.2.7)$$

Wil de probeeroplossing $R(t) \propto t^\alpha$ voldoen, dan moet simultaan aan een tweetal voorwaarden zijn voldaan:

1. De machten van t zijn aan beide zijden van het gelijkteken moeten hetzelfde zijn. Deze voorwaarde levert

$$n\alpha = 2 \iff \alpha = \frac{2}{n}. \quad (4.2.8)$$

2. De constantes zijn aan beide zijden moeten gelijk zijn. In combinatie met de eerste voorwaarde levert dit

$$\alpha^2 = \frac{4}{n^2} = \frac{8\pi G \rho_0 t_0^2}{3}, \quad (4.2.9)$$

Deze tweede voorwaarde bepaalt tevens de karakteristieke tijd t_0 :

$$t_0 = \frac{1}{n \sqrt{2\pi G \rho_0 / 3}}. \quad (4.2.10)$$

De oplossing voor de schaalfactor heeft dus de vorm

$$R(t) = \begin{cases} R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} & \text{koud, door stof gedomineerd vlak heelal,} \\ R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} & \text{heet, door straling gedomineerd vlak heelal,} \end{cases} \quad (4.2.11)$$

met $t_0 = 1/\sqrt{6\pi G \rho_0}$ in het eerste geval en $t_0 = 1/\sqrt{32\pi G \rho_0/3}$ in het tweede geval. In **Kader 14** bekijken we een alternatieve afleiding van dit resultaat met behulp van de w -parameter.

Kader 13: Alternatieve afleiding van de expansiewet

In Kader 10 introduceerden we de w -parameter

$$w = \frac{P}{\rho c^2} . \quad (4.2.12)$$

Deze parameter werd gebruikt om de Newtoniaanse theorie ‘relativistisch correct’ te maken in de zin dat de antwoorden gelijk zijn aan het resultaat van de Algemene Relativiteitstheorie.

De effectieve dichtheid die de zwaartekrachtspotentiaal in de Newtoniaanse afleiding van Friedmann’s vergelijking bepaalt is

$$\rho_{\text{eff}} = \rho (1 + 3w) . \quad (4.2.13)$$

Deze dichtheid komt in Friedmann’s vergelijking terecht mits we de alternatieve vorm (2.4.36) van Kader 10, de vergelijking voor de versnelling d^2R/dt^2 van de expansie, gebruiken:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \rho R (1 + 3w) . \quad (4.2.14)$$

Als w constant is luidt de verdunningswet:

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3(1+w)} . \quad (4.2.15)$$

Vullen we dit in Friedmann’s vergelijking in en gebruiken we opnieuw de aanname dat $R(t)$ een machtswet is van t dan vinden wij:

$$R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3(1+w)} , \quad (4.2.16)$$

in het geval dat $w \neq -1$. Voor stof (met $w = 0$) en voor straling (met $w = 1/3$) geven (4.2.15) en (4.2.16) het correcte resultaat.

In het geval $w = -1$ (het geval van *donkere energie*) is de dichtheid constant en (per definitie) gelijk aan ρ_0 . Dan wordt vergelijking (4.2.14):

$$\frac{d^2R}{dt^2} = +\frac{8\pi G \rho_0}{3} R \equiv \frac{\Lambda}{3} R . \quad (4.2.17)$$

De oplossing van deze vergelijking is de de-Sitter oplossing $R(t) \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3} t)$ met $\Lambda = 8\pi G \rho_0$, zie Hoofdstuk 4.5.

4.3 De Hubble parameter en de leeftijd van het heelal

Voor de zojuist afgeleide oplossing voor een vlak heelal is er een simpele relatie tussen de Hubble-parameter $H(t)$ en de leeftijd t van het heelal:

$$H(t) = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{2}{nt} = \begin{cases} \frac{2}{3t} & \text{koud, door stof gedomineerd vlak heelal,} \\ \frac{1}{2t} & \text{heet, door straling gedomineerd vlak heelal.} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Zo'n heelal zet steeds verder uit, maar de expansie gaat steeds langzamer naarmate het heelal ouder wordt: de Hubble-parameter neemt in beide gevallen af als $H \propto t^{-1}$. Dat betekent dat in de limiet $t \Rightarrow \infty$ de expansie asymptotisch tot stilstand komt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0. \quad (4.3.2)$$

In die zin is het vlakke heelal met $k = 0$ echt een grensgeval tussen het open heelal met $k < 0$, waarin de expansie altijd doorgaat (ook voor $t \Rightarrow \infty$) en het gesloten heelal met $k > 0$, waarin de expansie stopt op een eindige tijd.

Bovendien geldt ruwweg voor beide modellen¹:

$$H \simeq \frac{1}{\text{leeftijd van het heelal}}. \quad (4.3.3)$$

Dit is de reden waarom de preciese bepaling van de huidige waarde van de Hubble-parameter, H_0 , zo belangrijk is: in de simpelste heelalmodellen geeft de waarde van $1/H_0$, de zogenaamde *Hubble tijd*, direct een schatting voor de huidige leeftijd t_0 van het heelal. Het kader op de volgende pagina geeft een inzicht hoe de bepaling van H_0 tot stand komt.

Overigens: de factor $2/3$ in de relatie tussen H_0 en t_0 in een door stof gedomineerd, vlak heelal heeft een belangrijke rol gespeeld. Rond 1990 werd H_0 steeds nauwkeuriger bekend (zie bf Kader 14), en leverde de daarop gebaseerde leeftijdsschatting voor het heelal een leeftijd op van zo'n 9 miljard jaar. Dat was jonger dan de oudst bekende sterren. Dit simpele feit liet al zien dat het simpelste vlakke model niet ons heelal beschreef!

¹Zoals al eerder opgemerkt: dit kan men ook al opmaken uit een simpele dimensie-analyse: de formule $V = H_0 D$ laat zien dat de dimensie van H_0 gelijk is aan $[H_0] = 1/[t]$. De grootheid H_0^{-1} is dus een tijd, en het ligt voor de hand dat het een maat is voor de leeftijd van het heelal! Door H_0 uit te drukken in de astronomisch handige eenheid van km/s per Mpc wordt dat feit enigszins gemaskeerd. De huidige waarde voor $H_0 \simeq 68$ km/s per Mpc, correspondeert met de *Hubble tijd* $H_0^{-1} \simeq 14$ miljard jaar. Er is één belangrijke uitzondering op dit verhaal. In het *de Sitter heelal* is de kosmologische constante gelijk aan $H = \sqrt{\Lambda/3}$, en is echt constant als Λ constant is. In dat geval is er géén relatie tussen H en de leeftijd van het heelal.

Kader 14: De bepaling van de Hubble-constante H_0

De eerste bepaling van de Hubble-constante (door Hubble zelf) zat er ver naast: hij vond $H_0 \simeq 520$ km/s per Mpc, een veel te grote waarde. Het probleem zat hem niet zozeer in de metingen van de vluchtsnelheid, maar in de afstandsbepalingen.

Zoals al uitgelegd moet men daarvoor een waargenomen helderheid omzetten in een afstand, en die stap is vaak moeilijk. In de praktijk gebruikt men daarvoor de *Astronomische afstandsladder* (zie figuur) waarin het gebruik van verschillende objecten (veranderlijke sterren, bolhopen, hele sterrenstelsels etc.) de afzonderlijke treden vormen. Alleen de laagste tredes, bij de kortste afstanden binnen ons eigen Melkwegstelsel, zijn *directe* afstandsbepalingen met behulp van de parallax. De methode werkt omdat de verschillende treden overlappen: er zijn altijd bereiken in afstand waar twee of meer methodes tegelijkertijd kunnen worden gebruikt en de resultaten met elkaar kunnen worden vergeleken.

De door Hubble gebruikte methode, de lichtkracht-periode relatie voor Cepheïden, werkte in zijn tijd nog maar tot net voorbij de Andromedanevel op zo'n twee miljoen lichtjaar afstand. Tegenwoordig werkt zij met de *Hubble Space Telescope* tot de meest nabij grote groep sterrenstelsels, de *Virgo Cluster*, die op een afstand van 80 miljoen lichtjaar staat.

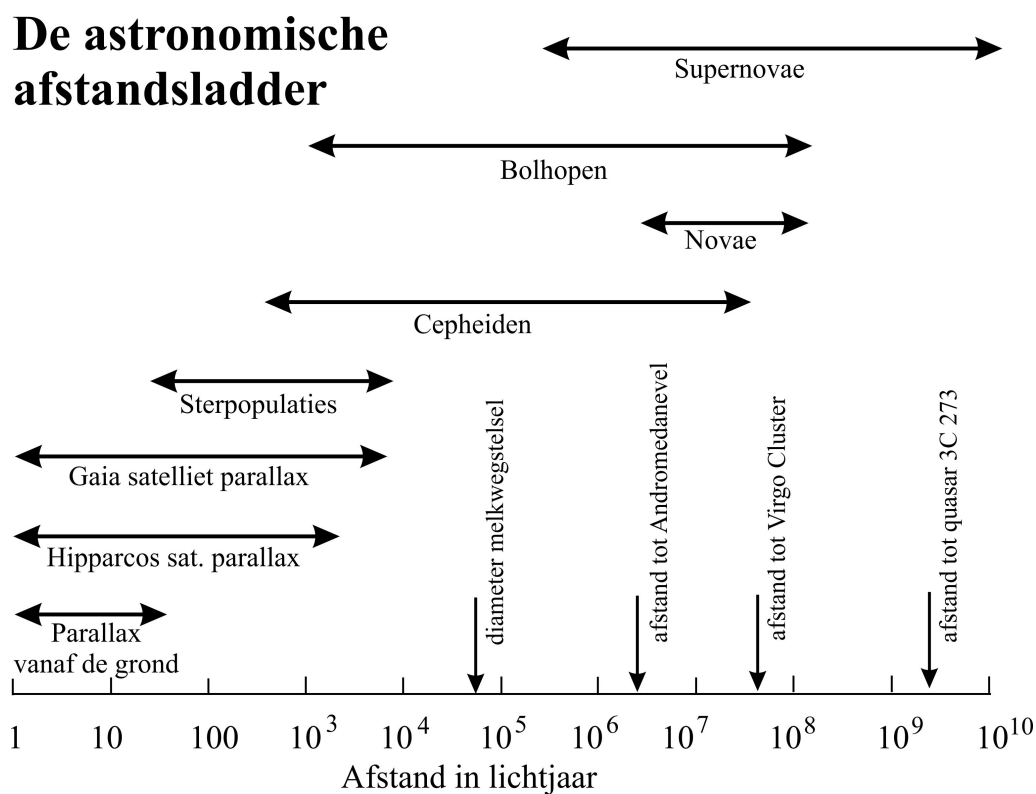
Wil men afstanden tot de rand van het waarneembare heelal ($\sim 10^{10}$ lichtjaar), dan moet men gebruik maken van *supernovae*: ontploffende sterren die korte tijd (\sim weken) even helder worden als een heel sterrenstelsel.

Toen men redelijk zeker was van alle stappen in de afstandsladder kon, zestig jaar na Hubble, voor het eerst een echt betrouwbare meting worden gedaan van de Hubble-constante. Dit werd rond 1990 gedaan met behulp van de *Hubble Space Telescope*, zie figuur 4.2, die een nauwkeurige bepaling van H_0 als één van zijn belangrijkste opgaven had. Voor 1990 varieerden de schattingen voor H_0 door verschillende groepen met een factor 2!

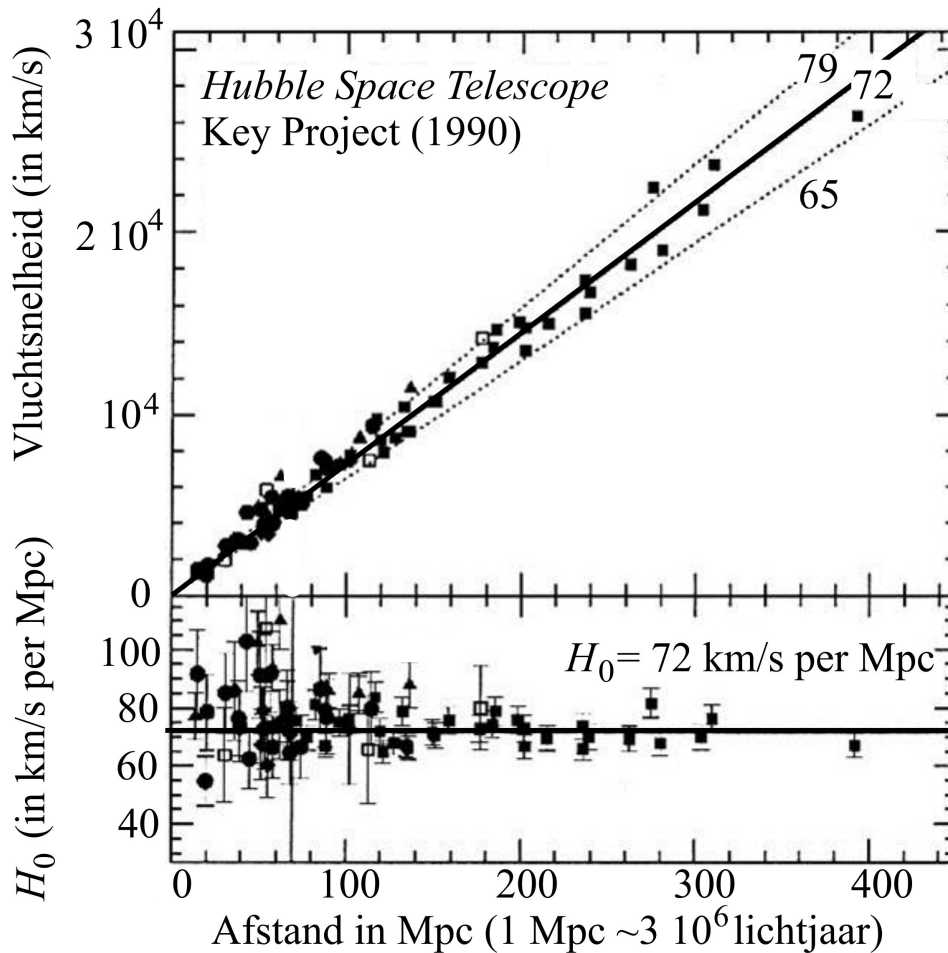
De in 1990 bepaalde waarde (met foutengrenzen door allerlei onzekerheden),

$$H_0 = 72 \pm 7 \text{ km/s per Mpc} , \quad (4.3.4)$$

ligt zeer dicht bij de moderne waarde ($H_0 = 67,3 \pm 1,2$ km/s per Mpc). Onderstaande figuur geeft het Hubble-diagram voor deze historische meting van H_0 .



Figuur 4.1: Een aantal treden van de astronomische afstandsladder en hun bereik in lichtjaren. Merk op de de horizontale afstandschaal steeds een factor 10 in afstand verspringt (logaritmische schaal). De verticale pijlen geven een aantal karakteristieke afstanden aan, zoals de diameter van ons Melkwegstelsel en de afstand tot de Andromedanevel. Hipparcos en Gaia zijn satellieten die speciaal zijn ontworpen voor het bepalen van sterposities aan de hemel. Gaia is in augustus 2014 met zijn metingen begonnen.



Figuur 4.2: De bovenste figuur geeft het Hubble diagram, de vluchtsnelheid als functie van de afstand, zoals bepaald in 1990 met behulp van de Hubble Space Telescope. De verschillende punten in de figuur zijn de metingen, met verschillende methodes uit de afstandsladder. Uit de helling van de rechte lijn die de waarnemingen het best weergeeft, de dikke lijn in de bovenste figuur, volgt de waarde van H_0 . De twee gestippelde lijnen geven aan wat er in principe nog mogelijk is binnen de meetfouten.

De figuur onder geeft de spreiding van de metingen rond de beste waarde voor H_0 . De grote spreiding van de metingen op relatief korte afstand (tot ~ 100 Mpc) heeft te maken met het feit dat sterrenstelsels een eigenbeweging vertonen ten opzichte van de vluchtbeweging. Zo komt bijvoorbeeld de Andromedanevel op ons af! Op korte afstand, als de vluchtbeweging $V = H_0 D$ klein is, vervuilt die eigenbeweging de metingen.

4.4 De kritische dichtheid

De aanname voor een vlak heelal met $k = 0$, levert via Friedmann's vergelijking ook een relatie op tussen de Hubble-parameter en de dichtheid:

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} \iff \rho = \frac{3H^2}{8\pi G} \equiv \rho_{\text{kr}}. \quad (4.4.1)$$

De grootheid ρ_{kr} is de zogenaamde *kritische dichtheid*. Het interessante van deze grootheid is dat zij alleen afhangt van de waarde van de Hubble parameter H , en de gravitatieconstante G . Een meting van H bepaalt dus gelijk de kritische dichtheid!

Voor een vlak heelal is de dichtheid per definitie altijd precies gelijk aan de kritische dichtheid. Voor niet-vlakke modellen is dat niet het geval: daar geldt:

$$\text{open heelal met } k < 0: \quad \rho < \rho_{\text{kr}}, \quad (4.4.2)$$

$$\text{gesloten heelal met } k > 0: \quad \rho > \rho_{\text{kr}},$$

Om die reden introduceren kosmologen de zogenaamde *Omega parameter*, de verhouding van de werkelijke dichtheid, een grootheid die je uit waarnemingen moet schatten, en de kritische dichtheid:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{\text{kr}}} = \frac{8\pi G \rho}{3H^2}. \quad (4.4.3)$$

In een vlak heelal verandert Ω niet: daar geldt altijd

$$\Omega = 1 \quad (\text{vlak heelal}). \quad (4.4.4)$$

In een open heelal ($\Omega < 1$) of een gesloten heelal ($\Omega > 1$) is Ω tijdsafhankelijk.

Merk op dat de huidige waarde van de Omega-parameter (zie **Tabel 5**), Ω_0 , in principe is te bepalen uit waarnemingen: door het meten van de huidige waarde van de Hubble parameter H_0 en het bepalen van de gemiddelde dichtheid ρ_0 van ons heelal. Dergelijke metingen geven een waarde voor Ω_0 zo dicht bij één dat de meeste kosmologen denken dat ons heelal exact vlak is met $\Omega = 1$.

4.5 Het De Sitter heelal

Bekijk nu een vlak heelal ($k = 0$) zonder materie in de vorm van stof of straling, maar *met* een kosmologische constante $\Lambda = 8\pi G \rho^{\text{vac}}$. Als de kosmologische constante echt constant is, zoals in Einstein's oorspronkelijke idee, dan luidt de Friedmann-vergelijking (4.1.1) met $\rho = 0$ en $k = 0$:

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3} = \text{constant} . \quad (4.5.1)$$

Gebruiken we de definitie (2.3.12) van de Hubble-parameter en definiëren wij de grootheid

$$H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho^{\text{vac}}}{3}} , \quad (4.5.2)$$

dan is vergelijking (4.5.1) equivalent met $H = \pm H_\Lambda$, en dus met

$$\frac{dR}{dt} = \pm H_\Lambda R . \quad (4.5.3)$$

Het plus teken geeft een uitzettende oplossing, en is de fysisch interessante (en ook enig mogelijke) oplossing. In dit geval zet het heelal uit volgens een macht van $e = 2.71828\dots$:

$$R(t) = R(0) e^{H_\Lambda t} . \quad (4.5.4)$$

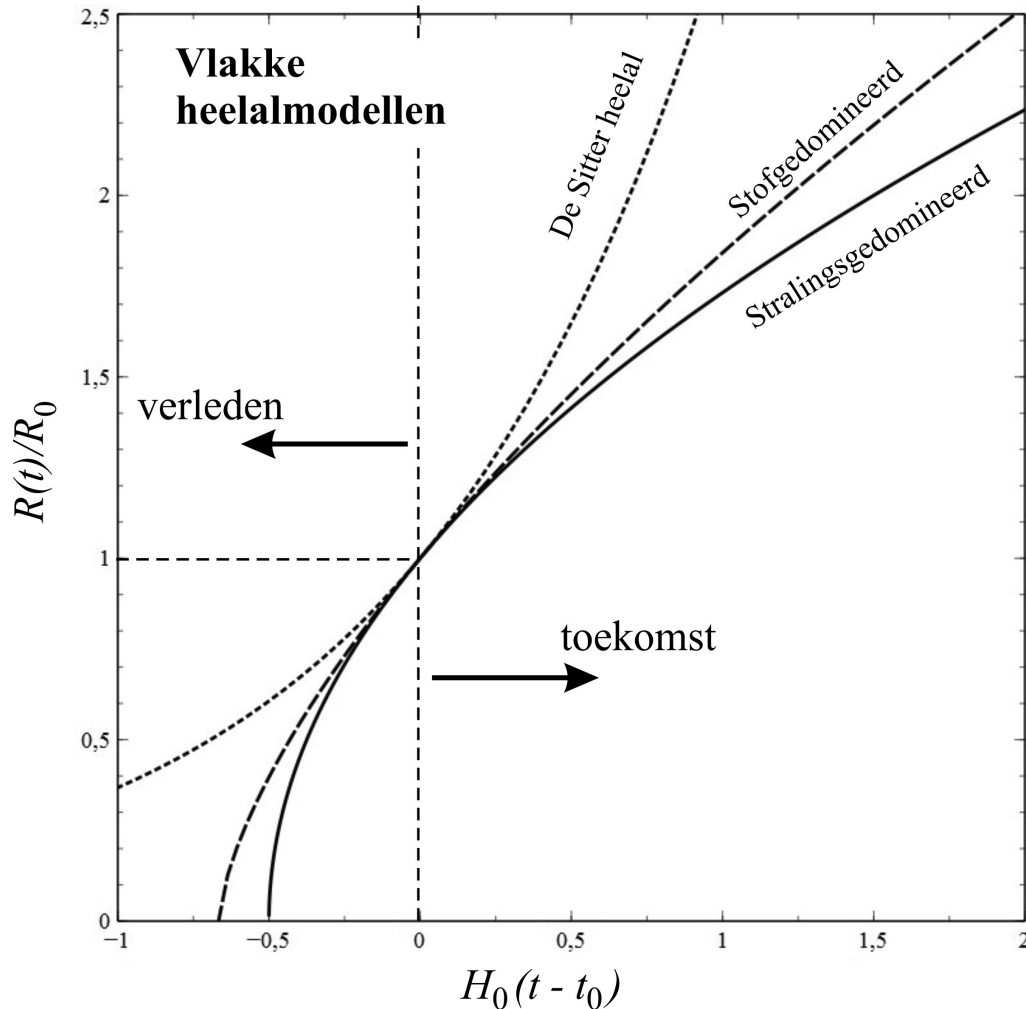
Dit is de zogenaamde *De Sitter oplossing*, voor het eerst afgeleid door de Nederlandse sterrenkundige Willem de Sitter. Voor Einstein was dit resultaat de aanleiding om het idee van een kosmologische constante op te geven: hij wilde deze gebruiken om een statisch heelal te construeren dat helemaal niet expandeert.

In tegenstelling tot de hierboven besproken stof/stralingsgedomineerde modellen *versnelt* de expansie van het De Sitter heelal als het ouder wordt. Daarnaast is het ook het enige heelalmodel waarin (voor constante Λ) de Hubble-parameter echt constant is: $H = H_\Lambda$. Dit type oplossing staat sinds ongeveer 1980 weer volop in de belangstelling. In zogenaamde *Inflatiemodellen* kent het hele vroege heelal een kort durende *De Sitter fase* waarin de schaalfactor zich min of meer gedraagt als de oplossing van (4.5.4). Onderstaande figuur toont het gedrag van de drie hier besproken vlakke Friedmann modellen.

De de-Sitter oplossing is ook speciaal omdat er in deze oplossing **geen** simpel verband is tussen de Hubble parameter en de leeftijd van het heelal van het type $t \simeq 1/H$. Uit (4.5.4) volgt immers:

$$t = \frac{\ln(R/R(0))}{H_\Lambda} . \quad (4.5.5)$$

De logaritmme in de teller wordt steeds groter als het heelal expandeert.



Figuur 4.3: Het gedrag van de schaalfactor voor een vlak heelal zonder kosmologische constante ($\Lambda = 0$). De schaalfactor is weergegeven als $R(t)/R_0$. De tijd wordt weergegeven als $H_0(t - t_0)$. Het nulpunt op de tijdsas valt daarom samen met $t = t_0$. Links van het nulpunt op de tijdsas correspondeert met het verleden, recht van de nulpunt met de toekomst.

De drie heelalmodellen (door stof gedomineerd, door straling gedomineerd en het door vacuüm-energie gedomineerde De Sitter heelal) zijn zo gekozen dat zij op $t = t_0$ dezelfde schaalfactor R_0 hebben. Daarom geldt $R/R_0 = 1$ op $t = t_0$. Ook hebben zij dezelfde Hubble-constante H_0 . Daarom raken de drie curves elkaar precies op dat punt.

De stof- en stralingsgedomineerde modellen zetten steeds langzamer uit als de tijd voortschrijdt: de bijbehorende curves krommen naar beneden. Het De Sitter heelal heeft een versnellende expansie: de bijbehorende curve kromt omhoog.

4.6 Het vlakke Friedmann-Lemaître heelal

Sinds 1998 gebruikt men een ander heelalmodel voor de beschrijving van ons heelal: een gemengd heelal met een kosmologische constante $\Lambda \neq 0$ naast de gewone materiedichtheid. Zo'n heelal heet een *Friedmann-Lemaître heelal* en is ondermeer genoemd naar de Belgische kosmoloog George Lemaître, die een hele klasse van dit soort heelalmodellen voor het eerst beschreef.

De totale dichtheid van het heelal wordt geleverd door koude materie (stof), straling en het vacuüm:

$$\rho = \rho^{\text{stof}} + \rho^{\text{straling}} + \rho^{\text{vac}} \quad (4.6.1)$$

Voor ieder van de drie ingrediënten van het heelal kunnen we, analoog aan (4.4.3), een aparte Omega-parameter definiëren:

$$\Omega = \Omega^{\text{stof}} + \Omega^{\text{straling}} + \Omega^{\text{vac}} . \quad (4.6.2)$$

Bijvoorbeeld: $\Omega^{\text{stof}} = 8\pi G \rho^{\text{stof}}/3H^2$. Tabel 5 geeft de experimentele waarden voor deze parameters op dit moment, inclusief de onzekerheden.

Tabel 5: de Omega-parameters van ons heelal (Planck, 2015)

Component	Omega-parameter	Experimentele waarde
Koude materie (stof)	Ω_0^{stof}	0.32 ± 0.02
Straling (fotonen + neutrino's)	$\Omega_0^{\text{straling}}$	$(9.5 \pm 0.2) \times 10^{-5}$
Vacuüm-energie	Ω_0^{vac}	0.68 ± 0.02
Afwijking van vlakheid	$\Omega_0 - 1$	$(-1.0 \pm 6.5) \times 10^{-3}$

Deze tabel laat een aantal zaken zien:

- Binnen de meetfouten is een zuiver vlak heelal met $\Omega_0 = 1$ een mogelijke (en zeer waarschijnlijke) situatie. Dit is de reden voor de nadruk die wij leggen op vlakke heelalmodellen;
- De meeste massa in het heelal zit in koude materie ('stof'). Wij zullen later zien dat die koude materie maar voor $\sim 6\%$ uit gewone materie bestaat (zoals jij en ik), en voor de overige $\sim 94\%$ uit *Donkere Materie*: een bijdrage aan de massadichtheid waarvan de samenstelling niet bekend is, en die alleen wordt opgemerkt in sterrenstelsels en groepen van sterrenstelsels door de gravitatiewerking die van Donkere Materie uitgaat.
- De equivalente massadichtheid van straling is in het huidige heelal verwaarloosbaar klein.
- De dominante bijdrage aan de dichtheid komt van het vacuüm. Toen dit 1998 werd ontdekt was dat een grote verrassing! Een goede verklaring voor dit feit, die tevens de waarde van Ω_0^{vac} correct voorspelt, ontbreekt vooralsnog.

Het vlakke Lemaître heelal heeft $\Omega_0 = 1$ en $\Omega^{\text{straling}} = 0$, een goede benadering voor het heelal waarin wij leven. De Friedmann vergelijking is dan

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho^{\text{stof}} + \rho^{\text{vac}}), \quad (4.6.3)$$

met ρ^{stof} en ρ^{vac} gelijk aan

$$\rho^{\text{stof}} = \rho_0^{\text{stof}} \left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^{-3}, \quad \rho^{\text{vac}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (4.6.4)$$

Friedmann's vergelijking kan analytisch worden opgelost, zie **Kader 15** voor de wiskundige details. De oplossing luidt:

$$R(t) = R_\Lambda \sinh^{2/3}(3H_\Lambda t/2). \quad (4.6.5)$$

De bijbehorende Hubble-parameter is

$$H(t) = H_\Lambda \coth(3H_\Lambda t/2). \quad (4.6.6)$$

De constante R_Λ is de schaalfactor waarbij (in het verleden) de dichtheid van stof en van het vacuüm precies gelijk waren: uit (4.6.4) volgt dat dit het geval is voor

$$R_\Lambda = R_0 \left(\frac{\rho_0^{\text{stof}}}{\rho^{\text{vac}}}\right)^{1/3} = R_0 \left(\frac{\Omega_0^{\text{stof}}}{\Omega_0^{\text{vac}}}\right)^{1/3} \simeq 0.78 R_0. \quad (4.6.7)$$

Dat is relatief recent in de geschiedenis van het heelal! De grootheid H_Λ is de waarde van de Hubble-parameter in een de Sitter heelal:

$$H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho^{\text{vac}}}{3}}. \quad (4.6.8)$$

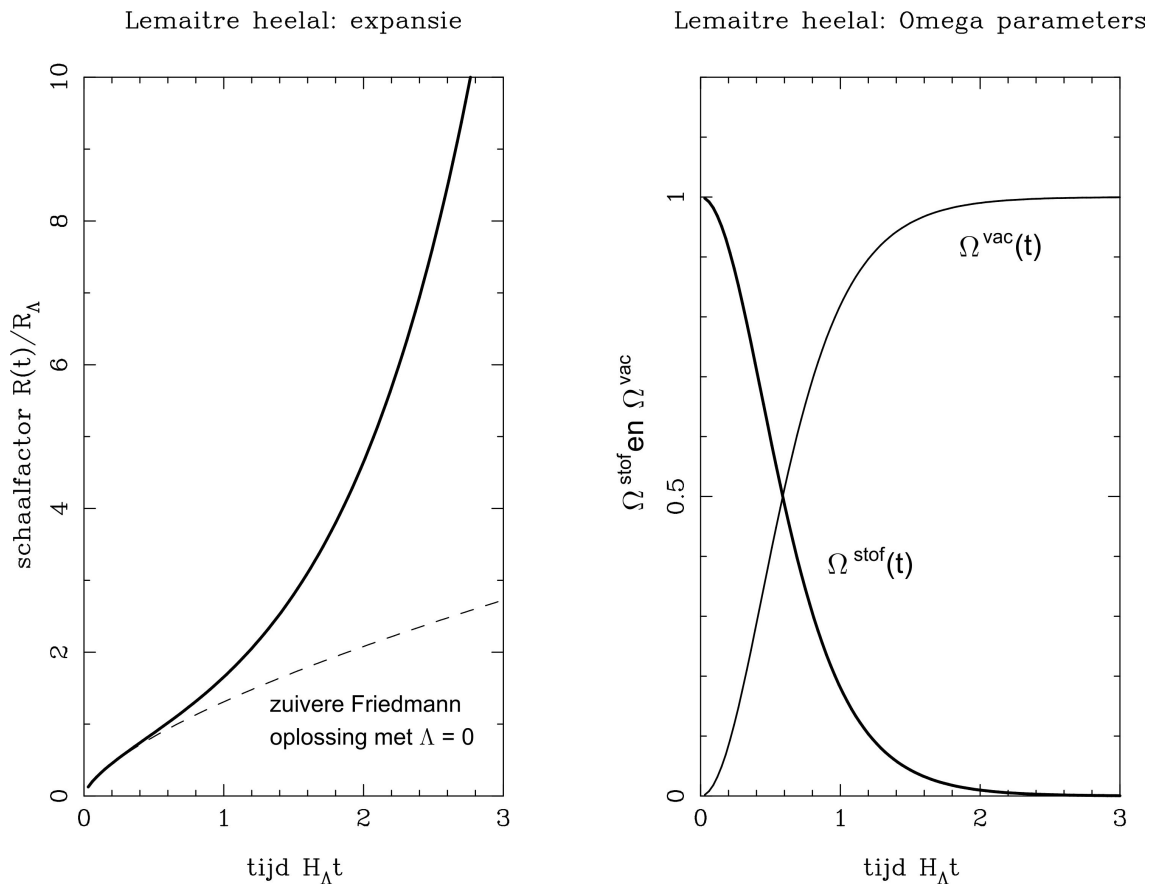
De hyperbolische functies die in deze oplossing verschijnen zijn gedefiniëerd als

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}. \quad (4.6.9)$$

De hyperbolische sinus en cosinus voldoen aan $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

De figuur op de volgende pagina geeft de eigenschappen van deze oplossing grafisch weer. Daaruit, en met de wiskundige toelichting in het kader, blijkt het volgende:

- Kort na het ontstaan, als $t \ll H_\Lambda^{-1}$ en $R \ll R_\Lambda$, gedraagt het heelal zich vrijwel als een vlakke Friedmann oplossing met $R(t) \propto t^{2/3}$. De expansie vertraagt dan. Rond $H_\Lambda t \simeq 0.5$ verandert het gedrag: de expansie versnelt! Uiteindelijk, als $t \gg H_\Lambda^{-1}$ en $R \gg R_\Lambda$, gedraagt het heelal zich als een door vacuümdichtheid gedomineerd de Sitter heelal waarin $H \simeq H_\Lambda$ en $R(t) \propto e^{H_\Lambda t}$.
- Door de verdunning neemt ρ^{stof} continu af, en daarmee ook de Omega-parameter Ω^{stof} . De vacuümbijdrage aan Ω (Ω^{vac}) neemt daarentegen steeds verder toe, simpelweg omdat ρ^{vac} constant is. Zij domineert voor $H_\Lambda t > 0.7$.
- Aan de vlakheidsvoorwaarde, $\Omega = \Omega^{\text{stof}} + \Omega^{\text{vac}} = 1$, is altijd voldaan: een vlak heelal blijft vlak!



Figuur 4.4: De evolutie van een vlak Lemaître heelal, waarin de inhoud een mengsel is van koude materie en van vacuümenergie. De figuur links geeft de schaalfactor (uitgezet als $R(t)/R_\Lambda$) als functie van de tijd (weergegeven als $H_\Lambda t$).

Het heelal start als een normaal materie-gedomineerd vlak Friedmann heelal (de dunne streepjescurve), maar rond $H_\Lambda t \sim 0.5$ begint de expansie te versnellen onder invloed van de kosmologische constante Λ . Uiteindelijk, als $H_\Lambda t > 2$, geldt $\Omega^{\text{vac}} \simeq 1$ en gedraagt dit heelal zich als een De Sitter heelal met $R(t) \propto e^{H_\Lambda t}$.

De figuur rechts geeft de ontwikkeling van de Omega-parameters voor materie (Ω^{stof}) en van de vacuümenergie (Ω^{vac}). Altijd geldt de vlakheidsvoorwaarde $\Omega^{\text{stof}} + \Omega^{\text{vac}} = 1$.

Dit model heeft een ander belangrijk voordeel: het geeft een leeftijd voor het heelal die in overeenstemming is met de waarnemingen. De nu bekende waarde voor de Hubble-constante, $H_0 \simeq 67$ km/s per Mpc, geeft voor een vlak, door stof-gedomineerd Friedmann heelal een leeftijd (zie 4.3.1)

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \simeq 9,3 \text{ miljard jaar.} \quad (4.6.10)$$

Dat is jonger dan sommige van de oudste sterren die we kennen, met een geschatte leeftijd van ~ 10 miljard jaar, en dat kan natuurlijk niet! De leeftijd in een vlak Lemaître heelal met $\Omega^{\text{vac}} \simeq 0,69$ is daarentegen gelijk aan

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\Omega_0^{\text{vac}}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_0^{\text{vac}}}}{1 - \sqrt{\Omega_0^{\text{vac}}}} \right)^{1/2} \right\} \simeq 13,8 \text{ miljard jaar.} \quad (4.6.11)$$

Daarmee is het probleem van de ons bekende oudste sterren opgelost. Figuur 4.5 toont hoe de leeftijd van een Friedmann-Lemaître varieert als functie van Ω^{vac} .

4.7 De stralingsfase van ons heelal

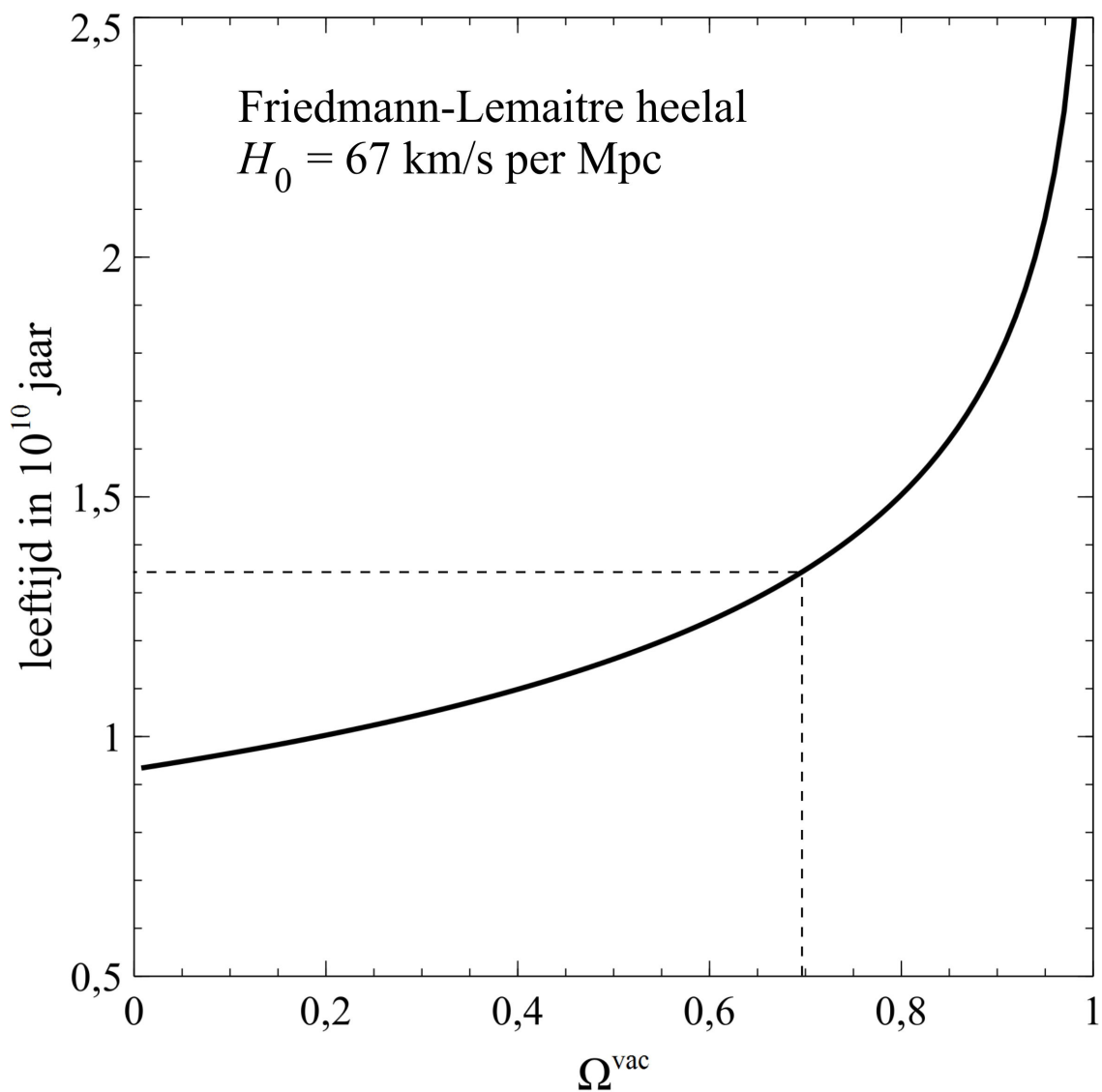
In het huidige heelal is de equivalente dichtheid van straling niet belangrijk. Maar dat was niet altijd het geval! Dit is een gevolg van het feit dat de stralingsdichtheid sneller afvalt (als R^{-4}) dan de dichtheid van stof, die gaat als R^{-3} . Maar dat betekent ook dat in een ver verleden, als $R \ll R_0$, juist straling overheerst: als we de film van het uitdijend heelal terugspoelen naar steeds kleinere waarden van de schaalfactor R neemt de dichtheid van straling sneller toe dan die van stof! Uit

$$\rho^{\text{stof}} = \rho_0^{\text{stof}} \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-3}, \quad \rho^{\text{straling}} = \rho_0^{\text{straling}} \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-4} \quad (4.7.1)$$

volgt dat de dichtheid van stof en straling gelijk zijn bij een schaalfactor

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\rho_0^{\text{straling}}}{\rho_0^{\text{stof}}} = \frac{\Omega_0^{\text{straling}}}{\Omega_0^{\text{stof}}} \simeq 3 \times 10^{-4}. \quad (4.7.2)$$

Het hele jonge heelal werd dus gedomineerd door straling, en niet door stof of vacuüm-energie! Later komt deze *stralingsfase* in de geschiedenis van het heelal meer uitgebreid aan bod.



Figuur 4.5: De leeftijd van een vlak Friedmann-Lemaître heelal als functie van Ω^{vac} voor een Hubble constante gelijk aan $H_0 = 67,3 \text{ km/s per Mpc}$, de gemeten waarde voor ons heelal. Naarmate Ω^{vac} toeneemt is het heelal bij gegeven H_0 ouder. Ons heelal heeft $\Omega^{\text{vac}} \approx 0,69$ wat een leeftijd geeft van ongeveer 13,8 miljard jaar.

Kader 15: Het vlakke Lemaitre heelal

Als we de volgende grootheden invoeren,

$$H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad , \quad \tau = H_\Lambda t \quad , \quad \mathcal{R} = \frac{R(t)}{R_\Lambda} \quad , \quad (4.7.3)$$

kan men de Hubble-parameter en Friedmann's vergelijking uitdrukken in de vorm

$$H(t) = \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right) = H_\Lambda \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d\mathcal{R}}{d\tau} \right) \quad , \quad (4.7.4)$$

$$\left(\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d\mathcal{R}}{d\tau} \right)^2 = \mathcal{R}^{-3} + 1 \quad .$$

We introduceren een hulpvariabele \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z} \equiv \mathcal{R}^{3/2} \quad . \quad (4.7.5)$$

Na gebruik van de relatie

$$\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d\mathcal{R}}{d\tau} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d\mathcal{Z}}{d\tau} \right) \quad , \quad (4.7.6)$$

kan de Friedmann vergelijking, na het nemen van de vierkantswortel aan beide zijden, worden geschreven als:

$$\frac{d\mathcal{Z}}{d\tau} = \frac{3}{2} \sqrt{1 + \mathcal{Z}^2} \quad . \quad (4.7.7)$$

Scheiding van variabelen^a levert

$$\frac{d\mathcal{Z}}{\sqrt{1 + \mathcal{Z}^2}} = \frac{3}{2} d\tau \quad . \quad (4.7.8)$$

^aDat wil in dit geval zeggen: alles met \mathcal{Z} links, en alles met τ rechts.

Deze wat vreemd uitziende relatie begrijp je misschien beter in integraalvorm:

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{1+Z^2}} = \int \frac{3}{2} d\tau = \frac{3}{2} \tau. \quad (4.7.9)$$

De integraal in het linkerlid is de inverse hyperbolische sinus^a:

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{1+Z^2}} = \sinh^{-1}(Z). \quad (4.7.10)$$

De oplossing van deze vergelijking voor Z , die voldoet aan de logische begin- en eindvoorwaarde voor een expanderend heelal (d.w.z. $R(t=0) = 0$ en $R(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$), luidt:

$$Z(\tau) = \sinh(3\tau/2). \quad (4.7.11)$$

Dit betekent dat de schaalfactor in dit heelal wordt gegeven door

$$R(t) = R_\Lambda \sinh^{2/3}(3H_\Lambda t/2). \quad (4.7.12)$$

De Hubble parameter van het Lemaître heelal is

$$H(t) = H_\Lambda \coth(3H_\Lambda t/2). \quad (4.7.13)$$

De definitie van de hyperbolische sinus en cosinus (\sinh en \cosh) betekent dat $\coth(x) \rightarrow 1$ als $t \rightarrow \infty$. De consequentie is dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = H_\Lambda = \text{constant}. \quad (4.7.14)$$

Asymptotisch gedraagt het Lemaître heelal zich dus als een De Sitter heelal! Dit is een meer algemene eigenschap van alle steeds uitdijende heelalmodellen met een kosmologische constante $\Lambda \neq 0$: de dichtheid van stof en straling worden allebei kleiner als het heelal uitzet. De dichtheid van het vacuüm is in deze modellen constant: zij wordt niet verdund. De vacuüm-dichtheid overheerst daarom uiteindelijk altijd, en bepaalt dan de verdere evolutie van het heelal.

^aDeze functie is gedefiniëerd door de volgende regel: als $a = \sinh^{-1}(x)$, dan geldt $\sinh(a) = x$.

Hoofdstuk 5

Heelalmodellen met kromming: $k \neq 0$

5.1 Inleiding

We bekijken kort het gedrag van modellen met $k \neq 0$. Uitgangspunt voor de discussie is Friedmann's vergelijking:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{k}{R^2(t)}, \quad (5.1.1)$$

met

$$\rho = \rho^{\text{stof}} + \rho^{\text{straling}} + \rho^{\text{vac}} \quad (5.1.2)$$

de totale dichtheid. Delen we aan beide kanten van het gelijk teken door H^2 en gebruiken we definitie (4.4.3) voor de Omega-parameter, dan volgt:

$$1 = \Omega - \frac{k}{H^2 R^2}. \quad (5.1.3)$$

Wij lossen k op uit vergelijking (5.1.3):

$$k = H^2 R^2 (\Omega - 1). \quad (5.1.4)$$

Hieruit volgt meteen dat een gesloten heelal met positieve k een heelal is met $\Omega > 1$. Een open heelal met negatieve k heeft $\Omega < 1$. Een vlak heelal met $k = 0$ heeft $\Omega = 1$, maar dat wisten we al: zo is Ω immers gedefiniëerd!

We bekijken nu globaal het gedrag van algemene Friedmann-modellen. Om te beginnen kiezen we onze afstandsmaat zo dat de huidige waarde van de schaalfactor gelijk aan één is:

$$R(t_0) = R_0 = 1. \quad (5.1.5)$$

Zo'n keuze is altijd mogelijk. Met deze keuze schaalt de dichtheid van stof en straling als

$$\rho^{\text{stof}} = \rho_0^{\text{stof}} R^{-3} \quad , \quad \rho^{\text{straling}} = \rho_0^{\text{straling}} R^{-4} \quad . \quad (5.1.6)$$

Relatie (5.1.3), toegepast op tijdstip t_0 wanneer de Omega-parameter gelijk is aan Ω_0 , wordt:

$$k = H_0^2 (\Omega_0 - 1) \quad . \quad (5.1.7)$$

Uitgesplitst naar ingrediënten hebben we $\Omega_0 = \Omega_0^{\text{stof}} + \Omega_0^{\text{straling}} + \Omega_0^{\text{vac}}$. Dan vinden we met behulp van (5.1.7):

$$H^2 = H_0^2 \left\{ \frac{\Omega_0^{\text{stof}}}{R^3} + \frac{\Omega_0^{\text{straling}}}{R^4} + \Omega_0^{\text{vac}} - \frac{\Omega_0 - 1}{R^2} \right\} \quad . \quad (5.1.8)$$

5.2 Gedrag van de oplossingen

In wat volgt kijken we naar niet-vlakke modellen ($\Omega_0 - 1 \neq 0$) die sterk lijken op ons heelal. Daarom verwaarlozen wij vanaf dit punt de stralingsbijdrage: wij zetten $\Omega_0^{\text{straling}} = 0$. Vervolgens gebruiken we $H = (1/R) (dR/dt)$, en vermenigvuldigen Friedmann's vergelijking met R^2 . We vinden:

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0^{\text{stof}}}{3} F(R) \quad . \quad (5.2.1)$$

$F(R)$ is een functie van de schaalfactor R en van de twee overgebleven Omega-parameters:

$$F(R) = \frac{1}{R} + \tilde{\lambda} R^2 - K \quad . \quad (5.2.2)$$

Hier definiëren we de constanten $\tilde{\lambda}$ en K , respectievelijk een maat voor het belang van de kosmologische constante en van de kromming van het heelal:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\Omega_0^{\text{vac}}}{\Omega_0^{\text{stof}}} \quad , \quad K = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0^{\text{stof}}} = 1 + \tilde{\lambda} - \frac{1}{\Omega_0^{\text{stof}}} \quad . \quad (5.2.3)$$

Om tot dit resultaat te komen is de relatie $H_0^2 \Omega_0^{\text{stof}} = 8\pi G \rho_0^{\text{stof}}/3$ gebruikt. In principe heeft vergelijking (5.2.1) twee oplossingen:

$$\frac{dR}{dt} = + \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0^{\text{stof}}}{3} F(R)} \geq 0 \quad \text{de uitdijende oplossing,} \quad (5.2.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = - \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0^{\text{stof}}}{3} F(R)} \leq 0 \quad \text{de krimpende oplossing.}$$

Het eigenschappen van de functie $F(R)$ bepaalt hoe snel het heelal uitdijt of krimpt, en of een uitdijing ooit stopt en dan omkeert in een universele krimp. Omdat in (5.2.4) de functie $F(R)$ in een wortel staat zijn alleen waarden van R met $F(R) \geq 0$ toegestaan. Een ommekeer van de expansie treedt op als er een moment is met $dR/dt = 0$. Dat kan alléén als $F(R_{\text{max}}) = 0$ voor eindige en positieve R_{max} en $F(R) > 0$ voor $R < R_{\text{max}}$. R_{max} is dan de maximale schaalfactor voor zo'n heelal.

We bekijken een tweetal belangrijke gevallen.

a. Klassieke Friedmann modellen met $\rho^{\text{vac}} = 0$:

In dit geval geldt $\tilde{\lambda} = 0$, $\Omega_0^{\text{stof}} = \Omega_0$ en $K = (\Omega_0 - 1)/\Omega_0$ zodat

$$F(R) = \frac{1}{R} - \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0}. \quad (5.2.5)$$

Als $\Omega_0 < 1$ (**open heelal** met $k < 0$ en $K < 0$) is $F(R)$ positief voor iedere $R \geq 0$. Het heelal blijft daarom altijd expanderen! Voor zeer grote waarden van R (in de praktijk voor $R \gg \Omega_0/(1 - \Omega_0)$) geldt dat $F(R) \simeq (1 - \Omega_0)/\Omega_0 = |K|$, en vergelijking (5.2.1) is te schrijven als

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0} \frac{8\pi G \rho_0^{\text{stof}}}{3}. \quad (5.2.6)$$

Een asymptotische oplossing voor grote R is een expansie met een constante snelheid. De expansiesnelheid wordt bepaald door de waarde van $|K|$:

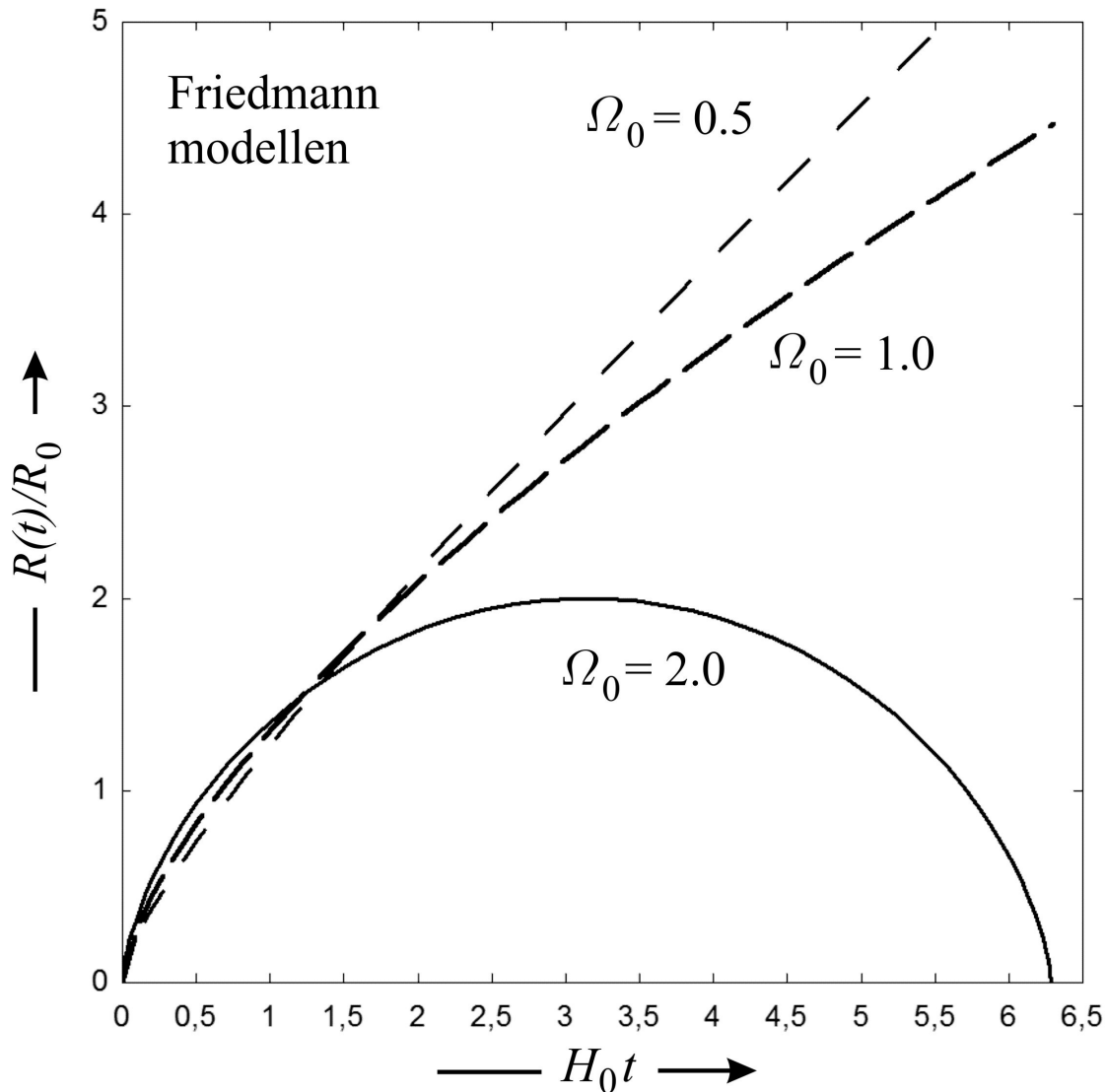
$$R(t) \simeq \sqrt{\frac{8\pi G |K| \rho_0^{\text{stof}}}{3}} t. \quad (5.2.7)$$

Voor een **gesloten heelal** met $\Omega_0 > 1$ (en $k > 0$, $K > 0$) heeft $F(R)$ een nulpunt voor

$$R = R_{\text{max}} = \frac{1}{K} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}. \quad (5.2.8)$$

Dan is $F(R)$ positief voor $0 \leq R < R_{\max}$, en negatief voor $R > R_{\max}$. De expansie moet daarom omdraaien op $R = R_m$, waar $F(R_m) = 0$ en $dR/dt = 0$. De oplossing springt daar van de uitdijende oplossing naar de krimpende oplossing met $dR/dt \leq 0$ (en $H \leq 0$) die ook is toegestaan voor $R \leq R_m$.

Onderstaande figuur geeft twee representatieve voorbeelden van dergelijke oplossingen ($\Omega_0 = 2$ en $\Omega_0 = \frac{1}{2}$), en de vlakke oplossing met $k = 0$, $\Omega_0 = 1$ ter referentie.



Figuur 5.1: Simpele Friedmann-modellen voor $\Omega_0 = 2$ (gesloten heelal), $\Omega_0 = 1$ (vlak heelal) en $\Omega_0 = 0.5$ (open heelal). Het gesloten heelal bereikt een maximale straal gelijk aan $R_m = 2 R_0$, en stort vervolgens weer in. Een dergelijk heelal heeft daarom een beperkte levensduur. Het vlakke en open heelal blijven expanderen, en worden in principe oneindig oud.

b: Friedmann-Lemaître modellen met een vacuïmdichtheid $\rho^{\text{vac}} \neq 0$

We bekijken nu modellen met $\Omega_0^{\text{vac}} > 0$, $\tilde{\lambda} > 0$. Het effect van een vacuïmdichtheid is in de eerste plaats dat het onderscheid tussen een gesloten heelal ($k > 0$, $K > 0$) en een open heelal ($k < 0$, $K < 0$) minder duidelijk is: als de vacuïmdichtheid voldoende groot is blijven ook gesloten modellen door-expanderen. Zij storten dus niet ergens in de toekomst weer in!

De functie $F(R)$ van vergelijking (5.2.2) heeft voor $\tilde{\lambda} > 0$ een enkel minimum, zie de figuur op de volgende pagina. De voorwaarde voor een minimum (of maximum) is

$$\frac{dF}{dR} = 2 \tilde{\lambda} R - \frac{1}{R^2} = 0 \iff R = \frac{1}{(2\tilde{\lambda})^{1/3}} \equiv R_* . \quad (5.2.9)$$

Voor een minimum moet gelden dat $d^2F/dR^2 > 0$ op $R = R_*$. Een simpele berekening levert:

$$\left(\frac{d^2F}{dR^2} \right)_{R=R_*} = 2\tilde{\lambda} + \frac{2}{R_*^3} = 6\tilde{\lambda} > 0 . \quad (5.2.10)$$

De waarde van $F(R)$ op het minimum is

$$F(R_*) = \frac{1}{R_*} + \tilde{\lambda} R_*^2 - K = \frac{3}{2} (2\tilde{\lambda})^{1/3} - K \equiv F_{\text{min}} . \quad (5.2.11)$$

Wil een heelal ooit weer instorten, dan moet het nulpunt van $F(R)$ bij een positieve waarde van R liggen. Dat kan alleen als F_{min} negatief is: $F_{\text{min}} < 0$. Omgekeerd: als er géén nulpunt van $F(R)$ is voor positieve R blijft het heelal altijd expanderen. Dat laatste is duidelijk het geval als minimumwaarde van $F(R)$ positief is: $F_{\text{min}} > 0$. Friedmann-Lemaître modellen kunnen daarom alleen weer instorten als $F_{\text{min}} < 0$, hetgeen betekent:

$$K > \frac{3}{2} (2\tilde{\lambda})^{1/3} = (27\tilde{\lambda}/4)^{1/3} \equiv K_{\tilde{\lambda}} . \quad (5.2.12)$$

Gebruiken we de definities van K en $\tilde{\lambda}$ (vergelijking 5.2.3) dan is deze voorwaarde te schrijven als:

$$\Omega_0^{\text{stof}} + \Omega_0^{\text{vac}} > 1 + \left(\frac{27 (\Omega_0^{\text{stof}})^2 \Omega_0^{\text{vac}}}{4} \right)^{1/3} . \quad (5.2.13)$$

Door-expanderende Friedmann-Lemaître modellen gedragen zich voor $t \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$ als een de Sitter heelal. Er geldt voor grote schaalfactor

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F(R) = \tilde{\lambda} R^2 = \left(\frac{\Omega_0^{\text{vac}}}{\Omega_0^{\text{stof}}} \right) R^2 = \left(\frac{\rho^{\text{vac}}}{\rho_0^{\text{stof}}} \right) R^2 . \quad (5.2.14)$$

Vergelijking (5.2.1) geeft in deze limiet:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \simeq \frac{8\pi G \rho^{\text{vac}}}{3} R^2 = H_\Lambda^2 R^2. \quad (5.2.15)$$

De expanderende oplossing is de Sitter oplossing die wij al meerdere malen zijn tegengekomen: $R(t) \sim e^{H_\Lambda t}$. Dit gedrag hebben we eerder gezien bij het vlakke Lemaître model voor ons heelal: als de massadichtheid van stof eenmaal ver genoeg is verdund overheerst de constante dichtheid van het vacuüm, en bepaalt deze dichtheid de verdere expansie van het heelal.

Figuur 5.2 geeft ter illustratie een grafiek van de functie

$$\tilde{F}(R) = R_* F(R) = \frac{R_*}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_*}\right)^2 - \frac{3}{2} \frac{K}{K_\lambda} \quad (5.2.16)$$

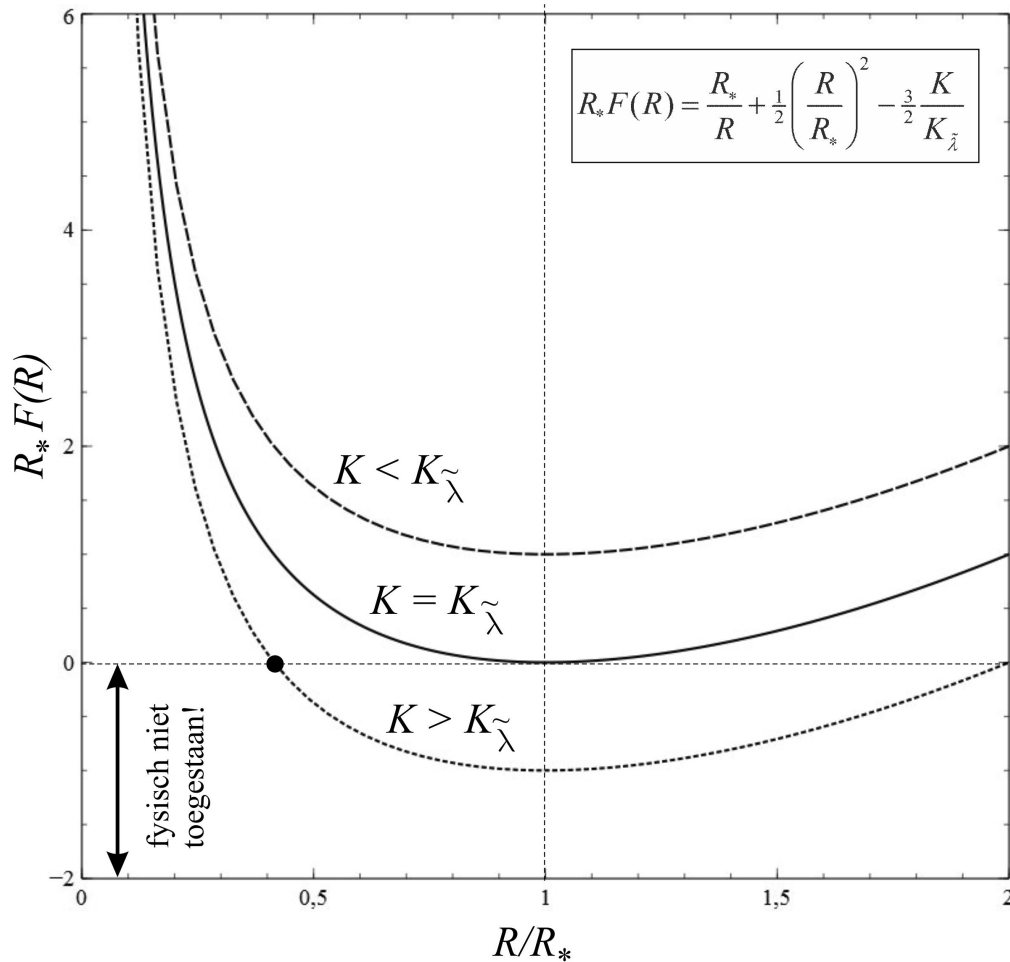
voor verschillende waarden van de krommingsparameter K . Het minimum van deze functie ligt altijd op

$$R = R_* = (2\tilde{\lambda})^{-1/3}, \quad (5.2.17)$$

waar

$$\tilde{F}(R_*) \equiv \tilde{F}_{\min} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{K}{K_\lambda}\right). \quad (5.2.18)$$

Voor $K > K_\lambda$ is $\tilde{F}_{\min} > 0$, blijft de functie positief en zijn alle waarden van R mogelijk. Als $K < K_\lambda$ is $\tilde{F}_{\min} < 0$ voor een $R > R_{\max}$ met $R_{\max} < R_*$, en zijn modellen met een Oerknal die beginnen op $R = 0$ alleen mogelijk als zij eerst uitzetten tot de maximale schaalfactor R_{\max} , waar $\tilde{F}(R_{\max}) = 0$, en dan weer instorten.



Figuur 5.2: Het gedrag van de functie $F(R)$ voor $\tilde{\lambda} = \Omega_0^{\text{vac}}/\Omega_0^{\text{stof}} > 0$. Uitgezet is $R_* F(R)$ als functie van R/R_* . Het enkele minimum van de functie valt zo altijd op $R/R_* = 1$. Omdat $(dR/dt)^2$ altijd positief (of nul) is zijn oplossingen met $F(R) < 0$ fysisch niet toegestaan.

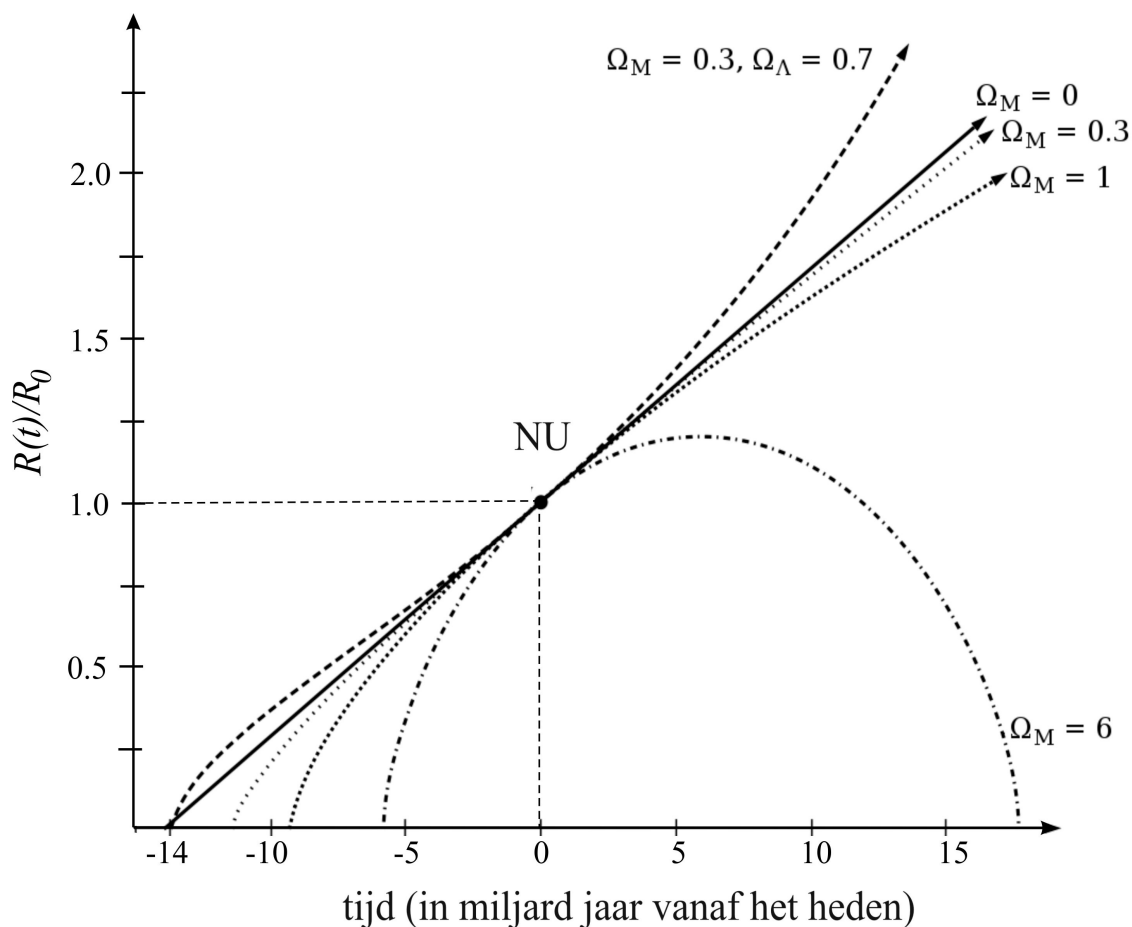
Voor $K < K_{\tilde{\lambda}}$ (de streepjescurve) is $F(R)$ altijd positief: een dergelijk Friedmann-Lemaître heelal expandeert daarom altijd verder. Voor $R < R_*$ neemt de expansiesnelheid af als R toeneemt. Maar voor $R > R_*$ neemt de expansiesnelheid weer toe!

Als $K > K_{\tilde{\lambda}}$ (de gestippelde curve) valt het minimum van $F(R)$ bij een negatieve waarde, in het gebied dat fysisch niet is toegestaan. Een Friedmann-Lemaître heelal met zo'n waarde van K expandeert dan van $R = 0$ (Oerknal) tot het punt $F(R) = 0$, aangegeven door de zwarte punt in de figuur. Daar geldt $dR/dt = 0$. Daarna krimpt het heelal weer: het keert als het ware op zijn schreden terug.

Ook het grensgeval $K = K_{\tilde{\lambda}}$ is aangegeven (de doorgetrokken curve). Een dergelijk heelal blijft in de praktijk hangen: als het begint met $R = 0$ nadert dit heelal het punt $R = R_*$ steeds dichter, maar de nadering gaat ook steeds langzamer omdat $dR/dt \downarrow 0$ als $F(R) \downarrow 0$ bij $R \uparrow R_*$. De waarde $R = R_*$ voor de schaalfactor is daarom in dit geval een asymptoot.

5.3 Samenvatting

Onderstaande figuur geeft een overzicht van een aantal Friedmann modellen. Zowel een gesloten, materie-gedomineerd heelal ($k > 0$, $\Omega_M = 6$), een vlak, materiegedomineerd heelal ($k = 0$, $\Omega_M = 1$), een open heelal ($k < 0$, $\Omega_M = 0.3$), een volstrekt leeg heelal ($\Omega_M = 0$) en een Friedmann-Lemaître heelal ($k = 0$, $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$) worden getoond. In de figuur wordt de notatie Ω_M gebruikt voor Ω^{stof} en Ω_Λ voor Ω^{vac} .



Figuur 5.3: Een aantal representatieve oplossingen voor de algemene Friedmann vergelijking: $R(t)/R_0$ als een functie van de tijd ten opzichte van het heden. Alle oplossingen hebben dezelfde Hubble constante $H_0 \approx 70$ km/s per Mpc: de curves raken elkaar nu, het punt dat overeenkomt met $R(t) = R_0$.

Hoofdstuk 6

De samenstelling van ons heelal

6.1 Een inventarisatie

Tabel 6 op de volgende pagina geeft een inventarisatie van de materiele inhoud van ons heelal. Het geeft alle ingrediënten, hun bijdrage aan de dichtheid in termen van de bijbehorende Omega-parameter, en de bewijzen voor het bestaan.

Zichtbare (lichtgevende) materie

Het is al heel lang bekend dat *lichtgevende materie*, voor het grootste deel het gas dat zit samengebond in sterren, een dichtheid vertegenwoordigt die veel kleiner is dan de kritische dichtheid. Gegeven de gemeten waarde van de Hubble constante H_0 is de kritische dichtheid gelijk aan

$$\rho_{\text{kr}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 9.2 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 . \quad (6.1.1)$$

We kunnen een ruwe berekening doen van wat alle zichtbare sterren in het heelal aan massadichtheid leveren. De ingrediënten voor deze berekening zijn¹:

1. De typische massa-lichtkracht verhouding voor sterren zoals die volgt uit waarnemingen en uit stermodellen: $M/L \simeq 3 (M_\odot/L_\odot) \simeq 5.2 \times 10^3 \text{ kg/W}$;
2. De typische lichtkracht (uit te rekenen uit de helderheid en de afstand) van een sterrenstelsel: $L_{\text{gal}} \simeq 10^{11} L_\odot \simeq 3.9 \times 10^{37} \text{ W}$;
3. De typische dichtheid van sterrenstelsels in het locale heelal:

$$n_{\text{gal}} \simeq 5 \times 10^{-3} \text{ Mpc}^{-3} \simeq 1.7 \times 10^{-70} \text{ m}^{-3} .$$

¹We gebruiken hier dat de massa van de Zon gelijk is aan $1 M_\odot \simeq 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$, en dat de zonslichtkracht gelijk is aan $1 L_\odot \simeq 3.86 \times 10^{26} \text{ W}$. Tenslotte: $1 \text{ Mpc} = 3.09 \times 10^{22} \text{ m}$.

Met deze getallen vinden we een massadichtheid aan lichtgevende materie gelijk aan:

$$\rho_{\text{licht}} = n_{\text{gal}} \times L_{\text{gal}} \times \left(\frac{M}{L} \right) \approx 3 \times 10^{-29} \text{ kg/m}^{-3} . \quad (6.1.2)$$

De bijbehorende Omega-parameter is

$$\Omega_{\text{licht}} = \frac{\rho_{\text{licht}}}{\rho_{\text{kr}}} \approx 3.3 \times 10^{-3} . \quad (6.1.3)$$

Bovenstaande berekening is heel ruw, omdat er een grote diversiteit is in sterrenstelsels, zowel in massa als in lichtkracht en de aantallen waarin zij voorkomen. Vast staat echter wel dat de lichtgevende materie slechts een kleine bijdrage geeft aan Ω_0 , zoals ook uit de tabel blijkt. In de praktijk is er meer massa dan men ziet: een deel zit verborgen in niet lichtgevende objecten.

Donkere materie

Eén van de grote verrassingen van de kosmologie is echter dat er zoiets bestaat als *donkere materie*: massa waarvan we de zwaartekrachtswerking kunnen zien, maar die geen licht geeft. De eerste aanwijzingen hiervoor kwamen al uit ons eigen Melkwegstelsel: in 1932 merkte de beroemde Nederlandse sterrenkundige Jan-Hendrik Oort al op dat de bewegingen van sterren in de omgeving van de Zon sneller zijn dan men op grond van de lokale verdeling van sterren, en de bijbehorende massa, zou vermoeden. De Zwitser Fritz Zwicky deed iets vergelijkbaars op grotere schaal: hij merkte op dat de snelheid waarmee sterrenstelsels bewegen door de *Coma Cluster*, een relatief dichtbij staande groep sterrenstelsels, zo groot is dat de groep uiteen zou vallen: de gemeten gemiddelde snelheid $\langle V \rangle$ is groter dan de ontsnappingssnelheid ten gevolge van de massa van de lichtgevende materie:

$$\langle V \rangle > \sqrt{\frac{2GM_{\text{licht}}}{R_{\text{cl}}}} , \quad (6.1.4)$$

met M_{licht} de massa van alle lichtgevende materie in de Coma Cluster, en R_{cl} de straal van de cluster. Het feit dat de cluster al oud is (dit volgt uit leeftijdsschattingen aan de hand van de kleur het uitgezonden sterlicht: oudere sterren zijn roder) betekent dat er extra (ongeziene) massa aanwezig moet zijn die de stelsels met zijn zwaartekracht aan de groep bindt.

In de periode 1965-1975 werd duidelijk dat deze situatie de norm is: een studie van de rotatiecurves van sterrenstelsels leverde een grotere baansnelheid op dan op grond van de massa in de zichtbare sterren in het stelsel zou moeten: er was dus extra massa! Voorbeelden van de rotatiecurve van ons eigen Melkwegstelsel, en die van een aantal andere spiraalstelsels, vind je in het deel over sterrenstelsels.

Tabel 6: De bijdragen aan de massadichtheid van het huidige heelal

Soort	Samenstelling	Bestaansbewijs	Bijdrage aan Ω_0
Zichtbare materie	Gewone materie, bestaande uit protonen en neutronen en elektronen, waaruit sterren, gas en stof in het heelal zijn opgebouwd	Waarnemingen met telescopen van de <i>lichtopbrengst</i> van sterrenstelsels en groepen van sterrenstelsels (zgn. clusters)	0.02
Baryonische donkere materie	Gewone materie die vrijwel geen straling uitzendt: <i>Bijvoorbeeld:</i> bruine dwergen, zwarte gaten (de zgn. MACHO's); <i>Massive Compact Halo Objects</i> ; Wolken zeer koud waterstofgas	Berekeningen van de netto opbrengst van de <i>voorwereldlijke nucleosynthese</i> voor deuterium, helium en lithium	0.03
Niet-baryonische donkere materie	Waarschijnlijk exotische deeltjes, zogenaamde WIMPS. <i>Bijvoorbeeld:</i> een extra massieve neutrino soort; <i>Ook een mogelijkheid:</i> de supersymmetrische partner van één van de bekende deeltjes uit het <i>standaardmodel</i> van de deeltjesfysica	<i>Zwaartekrachtswerking</i> , zoals wordt afgeleid uit de rotatiekromme van sterrenstelsels, en uit de waargenomen snelheden van sterrenstelsels in clusters; sterkte en frequentie van <i>gravitatie-lenzen</i>	0.26
Totaal koude materie (stof):	Zichtbare materie + donkere materie		$\Omega_0^{\text{stof}} = 0.31$
Straling:	Fotonen van de kosmische achtergrondstraling, (bijna) massalozе deeltjes zoals neutrino's	[1] Directe waarneming (fotonen); [2] Eigenschappen van de <i>fluctuaties</i> in de achtergrondstraling	$\Omega_0^{\text{str}} \approx 10^{-4}$
Vacuïmdichtheid (donkere energie)	Waarschijnlijk een quantummechanisch effect, klassiek op 'ad hoc' basis geïntroduceerd door Einstein als de kosmologische constante Λ	[1] Metingen suggereren dat $\Omega_0 \approx 1$, terwijl andere vormen van materie slechts $\Omega_0^{\text{stof}} \sim 0.28$ bijdragen; [2] Recente nieuwe metingen van de expansiegeschiedenis van het heelal met <i>type Ia supernovae</i>	$\Omega_0^{\text{vac}} = 0.69$
Totaal:	Zichtbare materie + donkere materie + straling + vacuïmdichtheid		$\Omega_0 \approx 1.0$ $ \Omega_0 - 1 < 0.01$

Moderne metingen vertellen ons dat minder dan 14% van alle koude materie in het heelal gewone (baryonische) materie is, en dat maar ongeveer 3,5% daarvan zichtbaar is in de vorm van sterren. De overige 86% van de massa wordt geleverd door de raadselachtige donkere materie, waarvan alleen de zwaartekrachtswerking te meten is! De samenstelling van donkere materie is onbekend, maar het lijkt het meest waarschijnlijk dat het gaat om een fundamenteel deeltje dat nog niet is opgemerkt bij experimenten in de hoge-energie fysica. Dergelijke experimenten maken gebruik van grote deeltjesversnellers, zoals de *Large Hadron Collider* bij CERN in Geneve. In die versnellers laat men deeltjes bij zeer hoge energie met elkaar botsen. Bij zo'n botsing wordt, als brokstukken, een lawine van andere fundamentele deeltjes geproduceerd. Deze deeltjes kunnen vervolgens worden bestudeerd.

Er wordt momenteel druk gezocht naar donkere materie. Bij die zoektocht worden twee, fundamenteel anders opgezette experimenten gebruikt:

1. Bij **aardgebonden experimenten** probeert men direct de tekenen te zien van de zeldzame interactie tussen 'gewone' materie en een deeltje van de donkere materie. Bij zo'n interactie (botsing) neemt (als voorbeeld) een elektron een deel van de energie van het inkomende deeltje over, vliegt weg en produceert daarbij licht in het medium (meestal een heel zuiver edelgas, zoals Xenon) waardoor het vliegt. Dat kortdurende lichtflitsje kan dan worden gemeten.

Die experimenten zijn moeilijk omdat de mogelijke kandidaten voor donkere materie-deeltjes een belangrijke eigenschap hebben: hun interactie met andere deeltjes moet héél zwak zijn. Om deze reden noemt men zulke deeltjes vaak *WIMPS: Weakly Interacting Massive Particles*. Dergelijke spookdeeltjes bestaan al in de bekende deeltjesfysica: neutrinos! Maar de eigenschappen (massa, sterkte wisselwerking) van de drie bekende neutrino-soorten (het elektron-neutrino, het muon-neutrino en het tau-neutrino) maken hen ongeschikt als donkere materie. De zwakke interactie betekent dat de botsingen niet heel frequent zijn. Bovendien zijn er andere processen zijn die dergelijke lichtflitsjes produceren, zoals een deeltje ten gevolge van de *kosmische straling*², zit het signaal waarnaar men zoekt vaak verborgen in een grote hoeveelheid valse signalen (ruis).

Dit type experiment heeft tot nu toe niet geleid tot de ondubbelzinnige detectie van donkere materie. Toch zijn ze niet nutteloos: naarmate de gevoeligheid van de experimenten toeneemt worden de mogelijke eigenschappen van de betrokken deeltjes (massa, interactie-sterkte) steeds verder beperkt, en vallen door theoretische berekeningen voorgestelde kandidaat-deeltjes af.

²Kosmische straling is de verzamelnaam voor een flux aan energetische deeltjes die min-of-meer met gelijke intensiteit uit alle richtingen invalt op de Aarde. Deze deeltjes (protonen, helium kernen etc.) hebben zoveel energie dat zij in de bovenlagen van onze dampkring bij botsingen een lawine nieuwe deeltjes produceren, waarvan sommigen het Aardoppervlak bereiken. Gevoelige deeltjesexperimenten moeten voor deze ongewenste lawine-deeltjes worden afgeschermd.

2. Bij **satelliet-experimenten** zoekt men naar energetische deeltjes of zeer energetische straling (gamma-straling) die vrijkomt bij het verval van deze deeltjes in andere deeltjes, of door annihilatie van een deeltje uit de donkere materie met zijn anti-deeltje. Daarbij ligt het voor de hand te kijken in de richting waar men de grootste concentratie van deze deeltjes verwacht: het centrum van onze Melkweg. Men moet satellieten gebruiken omdat de onze dampkring de hoog-energetische straling tegenhoudt.

Het centrum van de Melkweg is waarschijnlijk de beste plaats om te zoeken naar een annihilatie-signaal, en wel om de volgende reden: bij annihilatie botsen een deeltje en een antideeltje op elkaar, en produceren dan via hun vervalsproduct (andere deeltjes) fotonen. In de simpelste modellen verwacht men dat de dichtheid van deeltjes, n (gemeten in $[m]^{-3}$), en de dichtheid van anti-deeltjes \bar{n} , ongeveer gelijk is. In dat geval voldoet het aantal annihilaties per volume-eenheid aan

$$\text{aantal annihilaties per } m^{-3} \propto n \bar{n} \simeq n^2. \quad (6.1.5)$$

Deze schaling betekent dat het signaal sterk gepiekt is rond de hoogste concentratie deeltjes, en die vind je in het Melkwegcentrum.

Ook deze zoekmethode heeft zo zijn problemen: zo zijn er gewone sterrenkundige bronnen, zoals neutronensterren, die ook gamma-straling uitzenden. Ook hun dichtheid is maximaal nabij het centrum van de Melkweg, waar simpelweg de dichtheid van alle soorten sterren zijn maximum bereikt. Een groot verschil is dat dit *puntbronnen* zijn, die je in principe moet kunnen onderscheiden van de diffuse gloedstraling ten gevolge van een wolk donkere materie. In de praktijk is echter het probleem dat het gezichtsscherpte van gamma-telescopen lang niet zo goed is als van optische telescopen. Gezien de afstand tot het Melkwegcentrum (ongeveer 8,5 kpc) kunnen deze gamma-telescopen die vele puntbronnen niet meer van elkaar onderscheiden. Bovendien leidt de interactie van de alom in de Melkweg aanwezige kosmische straling met het gas tussen de sterren óók tot de productie van gammastraling, met een diffuse gloed als gevolg. Het wegfilteren van deze bijdragen aan het gamma-signaal uit het Melkwegcentrum, zodat men het signaal van de donkere materiewolk overhoudt, is een lastig probleem.

Men kan proberen dit probleem te omzijlen door dichter bij huis te kijken: naar de Zon! Net zoals donkere materie zich verzameld rond het centrum van onze Melkweg, in het zeer lokale heelal de grootste massa-concentratie, verwacht men dat hetzelfde gebeurt bij onze Zon: de grootste massa van het Zonnestelsel.

Sommige van deze experimenten lijken aanwijzingen te laten zien van het verwachte signaal van donkere materie, maar echt overtuigend is het nog niet.

Vacuüm dichtheid (Donkere Energie)

In 1998 kregen sterrenkundigen de eerste aanwijzingen dat ons heelal nog ingewikkelder in elkaar zit dan tot op dat moment werd gedacht. Men zocht naar heldere supernovae van Type Ia op grote afstand. Bij een supernova Type Ia verzamelt een compacte, uitgebrande ster (zoals een Witte Dwerg) in een dubbelstersysteem materiaal van zijn begeleider, meestal een normale ster. Dat materiaal verzamelt zich in een dunne laag op het oppervlak van de compacte ster. Dichtheid, druk en temperatuur aan de bodem van de laag nemen toe naarmate meer materiaal wordt verzameld. Op een gegeven moment worden dichtheid en temperatuur zo hoog dat kernfusie mogelijk wordt, een proces dat gewoonlijk alleen plaats vindt in de kern van een ster. Deze kernfusie verloopt explosief, waarbij de vrijgekomen energie leidt tot een enorme verhitting. Zo ontstaat een hete wolk die expandeert en die gedurende een aantal weken zoveel licht uit dat de ster enorm helder wordt. De lichtopbrengst wordt gevoed door energie uit het verval van langlevende radioactieve elementen, met name ijzer-, cobalt- en nikkel-isotopen. Deze zijn tijdens de explosieve kernfusie als bijproduct aangemaakt. Zonder deze energiebron zou de helderheid van de supernova veel sneller afnemen.

Hun zeer grote intrinsieke helderheid maakt Type Ia supernovae uitermate geschikt als bakens in het verre heelal: zij kunnen tot op grote afstand (astronomen zeggen: tot op grote roodverschuiving) worden gezien. Bovendien hebben ze een belangrijke eigenschap: de snelheid waarmee de helderheid na de explosie afneemt is direct gerelateerd aan de totale hoeveelheid licht die wordt uitgezonden, de intrinsieke helderheid. Zo kan men de helderheidsafname gebruiken om de piekhelderheid te berekenen bij de bron.

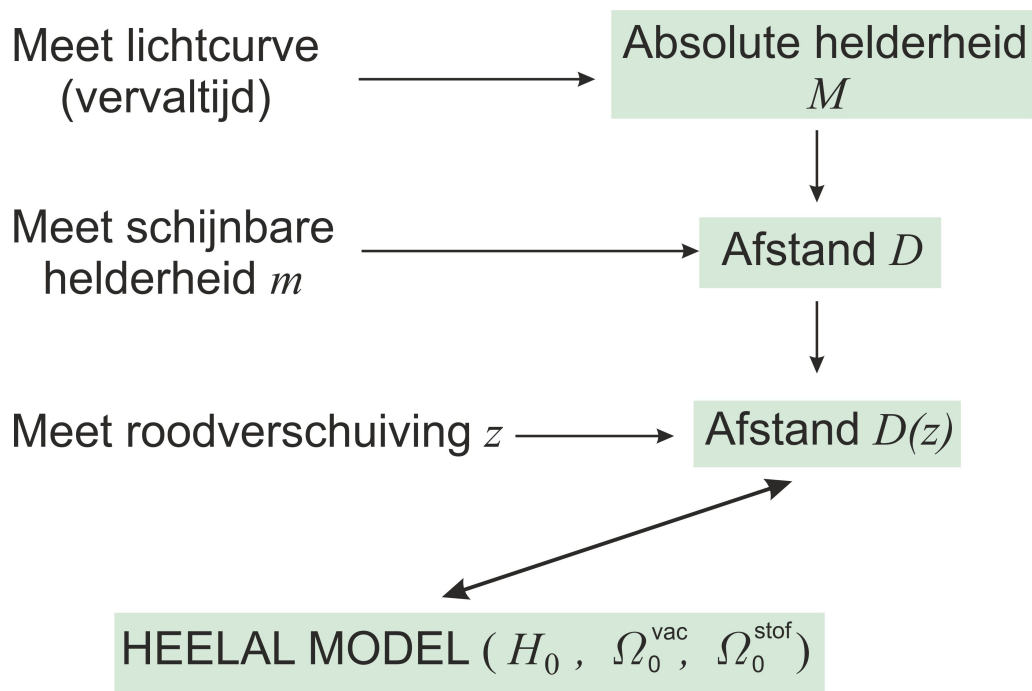
Toen voor het eerst een uitgebreid zoekprogramma werd gestart, en er voldoende supernovae waren gevonden, bleek al snel dat de verste exemplaren ruwweg 25% minder helder³ waren dan verwacht, en verder weg moesten staan dan aangenomen. De waarnemingen konden alleen simpel worden verklaard door te veronderstellen dat het heelal nu sneller expandeert dan vroeger: de Hubble-expansie versnelt. Het schema op de volgende pagina (vergelijk dit met Figuur 2!) geeft aan hoe men tot een dergelijke conclusie komt.

De discussie van Friedmann-Lemaître modellen laat zien dat -in het algemeen gesproken- een versnelde expansie alleen mogelijk is als er iets bestaat dat de rol speelt van een kosmologische constante Λ . In de moderne interpretatie wordt Λ veroorzaakt door een massadichtheid $\rho^{\text{vac}} \neq 0$ van het vacuüm: $\Lambda = 8\pi G \rho^{\text{vac}}$.

Conclusie

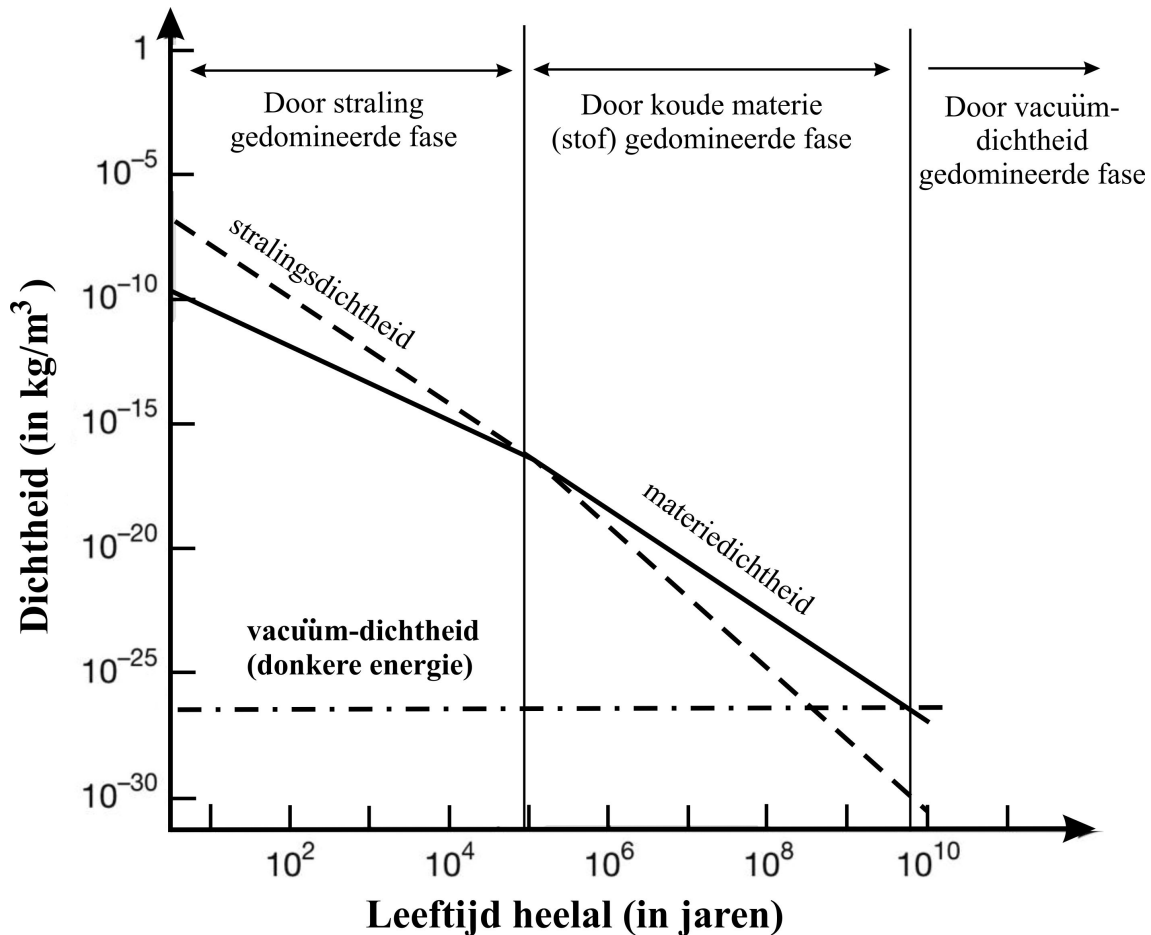
In de verschillende levensfasen van ons heelal wordt de expansie gedomineerd door verschillende ingrediënten: eerst door straling, dan door koude materie en relatief recent door de massadichtheid van het vacuüm. Figuur 6.2 toont dit in een grafiek.

³We spreken hier nu over de schijnbare (waargenomen) helderheid!



Figuur 6.1: De stappen die leiden tot het reconstrueren van de expansiegeschiedenis van ons heelal door te kijken naar verre supernovae van Type Ia. Net als in de methode die gebruik maakt van veranderlijke sterren (Cepheïden, zoals gebruikt door Hubble) wordt hier een andere, directe waarneembare eigenschap (de duur van de helderheidsafname) gebruikt om de lichtkracht van de supernova te schatten, en uit de waargenomen helderheid de afstand te berekenen.

Samen met de eveneens meetbare roodverschuiving en de waarde van de (al bekende) Hubble constante stelt dit ons in staat om het correcte heelalmodel te vinden.



Figuur 6.2: De variatie van de dichtheid van straling, koude materie (stof) en het vacuüm als functie van de leeftijd van het heelal. De schaal op beide assen is logaritmisch, en we gaan uit van een vlak heelal met eigenschappen als het onze.

In het vroege heelal overheerst de stralingsdichtheid. Daarna geeft koude materie de dominante bijdrage aan de dichtheid. Sinds kort (op een kosmologische tijdschaal van 10 miljard jaar) lijkt de dichtheid van het vacuüm te overheersen.

De knik in de lijnen voor de stralingsdichtheid en materiedichtheid die optreedt bij de overgang van een door straling gedomineerd heelal naar een door koude materie gedomineerd heelal bij $\sim 10^5$ jaar is een gevolg van de verandering in de expansie-snelheid van het heelal: die wordt groter. Vóór die tijd geldt $R \sim t^{1/2}$, na die tijd (tot aan het moment dat vacuümdichtheid gaat overheersen) geldt $R \sim t^{2/3}$.

Hoofdstuk 7

Licht, meebewegende coördinaten en de horizon

7.1 De voortplanting van licht in een expanderend heelal

Vrijwel alle informatie over ons heelal op de grootste schalen krijgen sterrenkundigen in de vorm van elektromagnetische straling: gammastraling, röntgenstraling, zichtbaar licht, radiostraling etc. Het ligt daarom voor de hand om de voortplanting van licht nader te bekijken. Eén aspect is al aan de orde geweest: het feit dat licht tijdens zijn reis door een expanderend heelal steeds verder wordt roodverschoven, zodat de golflengte waarmee het uiteindelijk wordt ontvangen langer is dan deze was op het moment van uitzenden van het licht. Hier geldt: des te ouder het foton, des te grote is de roodverschuiving. In dit hoofdstuk kijken we naar de effectieve reistijd van een foton, en de relatie met de afstand tot de bron.

De discussie gaat het eenvoudigst als we het concept van *meebewegende coördinaten* en de *meebewegende afstand* invoeren: coördinaten die mee-rekken met de expansie van het heelal. Dit houdt in dat ieder object dat passief meedoet aan de expansie van het heelal (zonder eigenbeweging) **vaste** meebewegende coördinaten heeft, en een vaste meebewegende afstand. Onderstaande cartoon illustreert het principe.

We behandelen het geval van een vlak heelal, maar het eindresultaat is algemeen geldig. De handigste definitie gaat uit van het afstandsrecept (2.2.3):

$$D(t) = D_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right), \quad (7.1.1)$$

en maakt de volgende twee keuzes:

$$\text{meebewegende coördinaat} = D_0, \quad (7.1.2)$$

$$\text{huidige schaalfactor} = R_0 = 1.$$

Op ieder ander moment in de evolutie van het heelal is dan de afstand tot een willekeurige verre bron

$$D(t) = D_0 R(t) . \quad (7.1.3)$$

Hieruit volgt gelijk op een willekeurig tijdstip t :

$$\text{meebewegende afstand} = \frac{\text{fysische afstand}}{R(t)} . \quad (7.1.4)$$

Bekijk nu een foton, ergens op zijn weg van een ver melkwegstelsel (met de meebewegende coördinaat $r_{\text{gal}} = D_0$) naar de waarnemer in de oorsprong op $r = 0$, zie figuur 7.2. Bekijk een klein tijdsinterval $t, t + \Delta t$, ergens tussen het moment t_{em} van het uitzenden van het foton en het moment t_0 van fotonontvangst. Omdat fotonen altijd met de lichtsnelheid reizen is de *fysische* afstand die in dat tijdsinterval wordt afgelegd gelijk aan

$$\Delta \ell = c \Delta t . \quad (7.1.5)$$

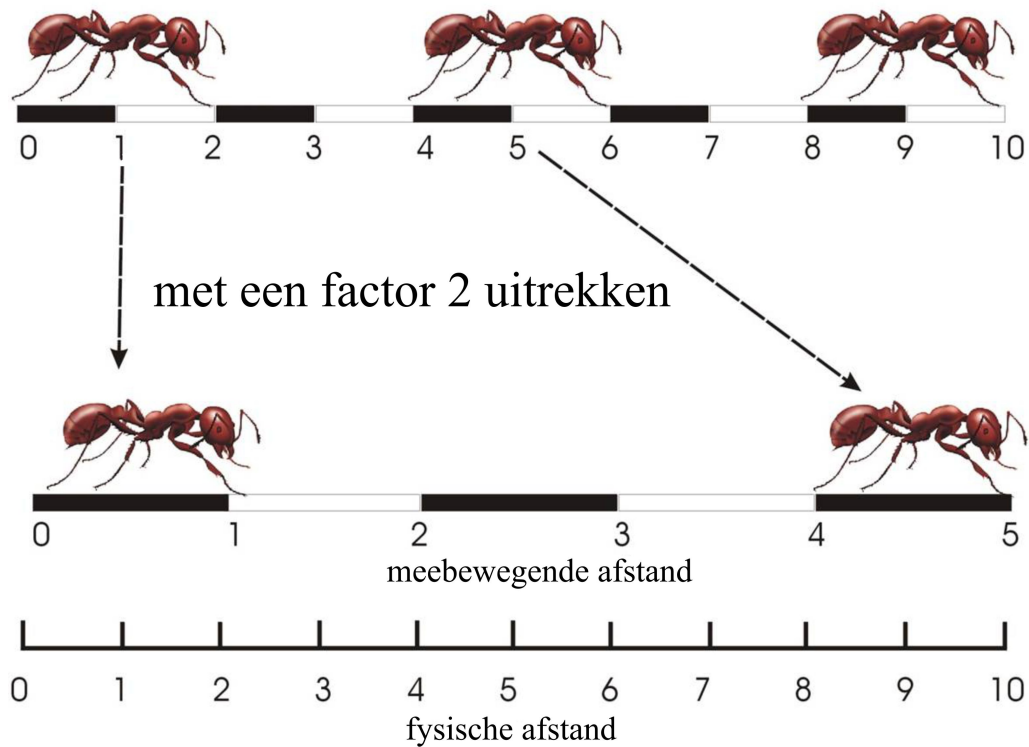
Als Δt voldoende klein is (d.w.z. veel kleiner dan de leeftijd van het heelal) is het bijbehorende *meebewegende* afstandsinterval gelijk aan (zie 7.1.4)

$$\Delta r_{\text{fot}} = \frac{\Delta \ell}{R(t)} = \frac{c \Delta t}{R(t)} . \quad (7.1.6)$$

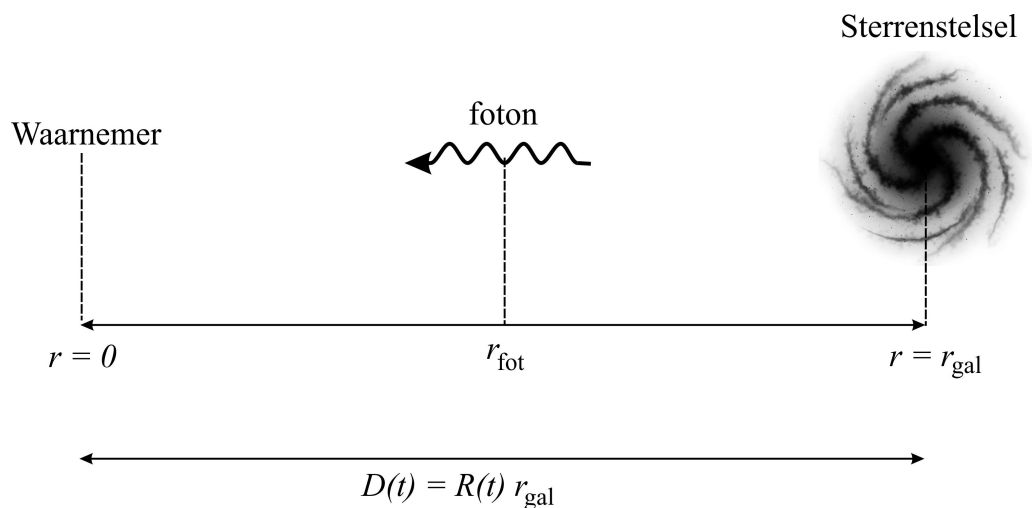
Willen we de totale meebewegende afstand, afgelegd door het foton tussen t_{em} en t_0 , berekenen dan moeten al deze intervallen worden opgeteld. Maar in de limiet $\Delta t \downarrow 0$ is dat niets anders dan het uitrekenen van de volgende integraal:

$$r_{\text{gal}} = D_0 = \int_{t_{\text{em}}}^{t_0} \frac{c dt}{R(t)} . \quad (7.1.7)$$

De integraal zegt in feite dat je ieder al afgelegd afstandsinterval $c dt$ moet oprekken met een factor $R_0/R(t) = 1/R(t) \geq 1$ om de *huidige* afstand te vinden. De grootte $1/R(t)$ is precies de factor waarmee de afstand is opgerekt in de tijdspanne van t tot t_0 , de nog resterende reistijd van het foton. Door onze slim gekozen definities geeft de integraal gelijk de afstand tot het sterrenstelsel op het moment van ontvangst. Dit is de afstand die sterrenkundigen altijd noemen als ze weer een verre bron hebben ontdekt.



Figuur 7.1: Het principe achter de definitie van meebewegende coördinaten, geïllustreerd aan de hand van een één-dimensionaal heelal, bestaande uit een uitrekbare (elastieke) meetlat die wordt bevolkt door intelligente mieren, de waarnemers. Als de meetlat met een factor twee wordt uitgerekt verdubbelt de fysische afstand tussen opeenvolgende mieren (de onderste schaalverdeling in centimeters). De meebewegende afstand, op de meetlat geschilderd als de wit-zwarte blokken, verandert echter niet: de blokken rekken mee. De mieren blijven in dit hele proces even groot.



Figuur 7.2: Het foton ergens op zijn weg van het verre sterrenstelsel (meebewegende coördinaat: $r = r_{\text{gal}} = D_0$) naar de waarnemer in de oorsprong (d.w.z. met meebewegende coördinaat: $r = 0$). Zoals hier getekend op tijdstip t , een willekeurig tijdstip tussen emissie en ontvangst van het foton, bevindt het foton zich op een meebewegende coördinaat $r_{\text{fot}}(t)$.

7.2 Kosmische tijdsdilatatie

Resultaat (7.1.7) heeft een belangrijke toepassing. Bekijk *twee* fotonen, afkomstig van hetzelfde verre sterrenstelsel. Het eerste foton vertrekt op tijdstip t_{em} en het tweede foton korte tijd later, op tijdstip $t_{\text{em}} + \Delta t_{\text{em}}$. De fotonen worden kort na elkaar ontvangen: het eerste op tijdstip t_0 , het tweede op tijdstip $t_0 + \Delta t_0$. Voor voldoende kleine Δt_0 (bijvoorbeeld: $\Delta t_0 = 1$ seconde) is de afstand D_0 tot de bron bij ontvangst nauwelijks veranderd. Dan geldt voor beide fotonen relatie (7.1.7): voor het eerste foton precies zoals geschreven in die vergelijking. Echter, voor het tweede foton is de ondergrens voor de integraal $t_{\text{em}} + \Delta t_{\text{em}}$, en de bovengrens $t_0 + \Delta t_0$. Willen beide integralen toch hetzelfde antwoord (d.w.z.: D_0) opleveren, dan moet het stukje van de tweede integraal dat ten opzichte van de eerste integraal mist aan de ondergrens gelijk zijn aan het extra stukje aan de bovengrens, dus:

$$\frac{c \Delta t_{\text{em}}}{R(t_{\text{em}})} = \frac{c \Delta t_0}{R(t_0)} = c \Delta t_0 . \quad (7.2.1)$$

De laatste gelijkheid volgt omdat we hebben gekozen voor eenheden met $R(t_0) = R_0 = 1$. Het tijdsinterval tussen de ontvangst van de twee fotonen volgt als

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t_{\text{em}}}{R(t_{\text{em}})} . \quad (7.2.2)$$

De roodverschuiving z_0 waarmee de twee fotonen aankomen rond tijdstip t_0 is volgens (7.2.3) met $R(t_0) = 1$ gelijk aan:

$$z_0 = \frac{R(t_0)}{R(t_{\text{em}})} - 1 = \frac{1}{R(t_{\text{em}})} - 1 . \quad (7.2.3)$$

Dit betekent $R_{\text{em}} = 1/(1 + z_0)$ zodat

$$\Delta t_0 = (1 + z_0) \Delta t_{\text{em}} . \quad (7.2.4)$$

De conclusie is dat het interval van ontvangst in dezelfde mate is opgerekt als de golflengte van de twee fotonen. Dit noemt men *kosmische tijdsdilatatie*. Men kan ook zeggen dat de ontvangstfrequentie van opeenvolgende fotonen, gelijk aan $1/\Delta t_0$, op dezelfde manier is verlaagd ten opzichte van de emissie-frequentie ($1/\Delta t_{\text{em}}$) als de frequentie van ieder *individueel* foton: $\nu_0 = c/\lambda_0 = \nu_{\text{em}}/(1 + z_0)$.

7.3 Flux en helderheid van een verre bron

Bovenstaand resultaat voor de afstand-afhankelijke toename van het ontvangstinterval heeft invloed op de schijnbare helderheid van een verre bron. We doen de berekening weer voor een vlak heelal, maar het uiteindelijke resultaat is algemeen geldig.

Neem voor het gemak aan dat een bron per seconde \dot{N}_{em} fotonen uitzendt, ieder met een frequentie ν_{em} en foton-energie $\mathcal{E}_{\text{em}} = h\nu_{\text{em}}$. De lichtkracht van de bron is dan

$$L = \dot{N}_{\text{em}} \times \mathcal{E}_{\text{em}} \quad [\text{W}] . \quad (7.3.1)$$

Een waarnemer, voor wie de bron bij ontvangst op afstand D_0 staat, ziet de individuele fotonen binnenkomen met roodvershoven (lagere) frequentie

$$\nu_0 = \frac{\nu_{\text{em}}}{1 + z_0} \quad [\text{Hz}] . \quad (7.3.2)$$

De corresponderende foton-energie is $\mathcal{E}_0 = h\nu_0 = \mathcal{E}_{\text{em}}/(1 + z_0)$. Per oppervlakte-eenheid en per seconde passeert hem een aantal fotonen gelijk aan

$$\dot{n} = \frac{\dot{N}_{\text{em}}}{4\pi D_0^2} \times \left(\frac{1}{1 + z_0} \right) \quad [\text{fotonen per m}^2 \text{ per seconde}] . \quad (7.3.3)$$

De factor $1/(1 + z_0)$ brengt de kosmische tijdsdilatie in rekening: er komen minder fotonen per seconde aan! De flux die de waarnemer meet is dan (vergelijk met relatie 1.2.1):

$$F = \dot{n} \mathcal{E}_0 = \frac{\dot{N}_{\text{em}} \mathcal{E}_{\text{em}}}{4\pi D_0^2 (1 + z_0)^2} = \frac{L}{4\pi D_0^2 (1 + z_0)^2} \quad [\text{W/m}^2] . \quad (7.3.4)$$

Ten opzichte van het klassieke resultaat (1.2.1) staat hier een extra factor $1/(1 + z_0)^2$: het gecombineerde effect van de roodverschuiving van ieder foton, en de kosmische tijdsdilatie. Wil men toch een formule opschrijven voor de flux van dezelfde vorm als het klassieke resultaat, dan moet men schrijven

$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad \text{met} \quad D_L = (1 + z_0) D_0 . \quad (7.3.5)$$

De grootheid D_L noemt men de lichtkracht-afstand¹.

Bovenstaande afleiding gaat uit van een simpele situatie waarbij alle fotonen dezelfde frequentie hebben bij emissie. Echter, de roodverschuiving en tijdsdilatie hangen geen van beide af van de fotonfrequentie ν . Dat betekent dat alle fotonen gelijk worden behandeld. Daarom doet het er niet toe of de bron een breed spectrum van fotonen met allerlei verschillende frequenties uitzendt: als men maar over alle frequenties integreert en zo de totale lichtkracht L berekent blijft het uiteindelijk resultaat (vergelijking 7.3.4) hetzelfde.

¹Van de Engelstalige term *Luminosity Distance*

7.4 De horizonafstand

Integraal (7.1.7) heeft nog een tweede toepassing. Stel, wij willen weten wat de maximale afstand is die een foton kan reizen in een tijd t_0 . Daarbij vergeten we gemakshalve dat het vroege heelal ondoorzichtig was. De verste afstand wordt afgelegd door de oudste fotonen. Dat zijn de fotonen die hun reis beginnen direct na de Oerknal, op tijdstip $t_{\text{em}} = 0$. Die maximale afstand, de *horizonafstand* D_{hor} , is dus gelijk aan

$$D_{\text{hor}}(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{c \, dt}{R(t)}. \quad (7.4.1)$$

Voor alle heelalmodellen die hier worden besproken komt uit deze integraal voor D_{hor} een eindig getal: de horizonafstand is beperkt in grootte!

Het simpelste voorbeeld is een heelal dat expandeert als $R(t) = (t/t_0)^\alpha$. We hebben in Hoofdstuk 4 (vergelijking 4.2.11 met $R_0 = 1$) gezien dat $\alpha = 1/2$ voor een door straling gedomineerd vlak heelal, en $\alpha = 2/3$ voor een door stof gedomineerd vlak heelal. Voor een dergelijk heelal geldt:

$$D_{\text{hor}}(t_0) = c \int_0^{t_0} dt \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\alpha} = \frac{ct_0}{1-\alpha} = \begin{cases} 2ct_0 & \text{stralingsgedomineerd vlak heelal,} \\ 3ct_0 & \text{door stof gedomineerd vlak heelal.} \end{cases} \quad (7.4.2)$$

Op ieder ander tijdstip geldt de vergelijkbare relatie, bijvoorbeeld $D_{\text{hor}}(t) = 3ct$ voor een door stof gedomineerd heelal.

Qua orde-van-grootte geldt dan $D_{\text{hor}}(t) \simeq ct$, maar in de praktijk is de horizonafstand groter dan ct , simpelweg omdat de al afgelegde weg van een foton tijdens de verdere reis nog wordt opgerekt door de expansie van het heelal. De preciese correctiefactor die dit in rekening brengt (een factor 2 resp. een factor 3 in bovenstaand voorbeeld) hangt af van het preciese heelalmodel.

De meeste heelalmodellen hebben dus een horizon: de maximale afstand die met de lichtsnelheid kan worden afgelegd gedurende de leeftijd van het heelal. Ook geldt dat de horizonafstand groter wordt naarmate het heelal ouder wordt. Zij was dus in het verre verleden kleiner, véél kleiner! Dat leidt tot het *horizonprobleem* dat in het volgende hoofdstuk aan de orde komt.

Men kan de horizonafstand ook zien als de maximale afstand die we in een (doorzichtig) heelal kunnen overzien. Ieder waarnemer in het heelal heeft dus een denkbeeldige bol om zich heen, met een straal gelijk aan de horizonafstand, van waarbinnen alle waarneembare signalen moeten komen. Fotonen van bronnen die nog verder weg staan hebben eenvoudigweg nog niet de tijd gehad om de waarnemer te bereiken.

Dit alles betekent overigens **niet** dat er buiten die horizon niets zit, of dat het heelal buiten de horizon hele andere eigenschappen heeft dan daar binnen. In de eerste plaats hangt de locatie van de horizon af van de waarnemer: hij staat in het centrum van zijn horizon, en een waarnemer op een andere locatie in het heelal heeft een andere horizon: hij overziet een ander deel van het heelal.

Vrijwel alle kosmologen denken dat de redenatie *buiten de horizon is alles anders* helemaal niet kan, en wel om de volgende reden. Stel dat het *wel* zo was: dan zou het heelal buiten de huidige horizon er heel anders uitzien, en zouden we dat in de nabije toekomst gaan merken. Dat zou echter betekenen dat [1] de huidige leeftijd van het heelal wel een hele speciale leeftijd is en [2] dat onze locatie ook heel speciaal is. Wat het eerste betreft: een hypothetische waarnemer van een buitenaardse beschaving die al bestond toen het heelal nog maar half zo oud was als nu zou dezelfde redenatie kunnen ophangen. Toen was de horizon veel kleiner, (ongeveer de helft kleiner). We weten dat hij ongelijk zou hebben gehad: binnen de inmiddels \sim twee keer grotere horizonafstand is alles volgens onze waarnemingen *grosso modo* hetzelfde! Het lijkt erg onwaarschijnlijk dat wij op dit moment net zouden leven op een dergelijk omslagtijdstip, en bovendien op zo'n speciale (centrale) locatie.

Hoofdstuk 8

De grote-schaal structuur van het heelal

Alhoewel Friedmann-modellen er van uit gaan dat de materie in het heelal uniform is verdeeld laten de waarnemingen ons meteen zien dat dit op een schaal veel kleiner dan de horizonschaal niet het geval is. De verdeling van sterrenstelsels, en van groepen van sterrenstelsels, vertoont een duidelijke structuur, zoals blijkt uit figuur 8.1. De stelsels zijn verdeeld in een structuur die wat lijkt op Zwitserse kaas: de meeste stelsels bevinden zich op de randen van grote, min of meer bolvormige, ‘leegtes’ (Engelse term: *voids*). Deze structuur ontstaat in een samenspel tussen de aantrekkende zwaartekrachtswerking van lokale massa-concentraties enerzijds, die leidt tot klontering, en anderzijds drukkrachten en de globale expansie van het heelal die leiden tot verdunning van de massadichtheid. Het is tegenwoordig mogelijk om de vorming van structuur op grote (\geq Mpc) schaal nauwkeurig na te rekenen met behulp van computersimulaties. Deze simulaties worden steeds nauwkeuriger, en de overeenstemming met de werkelijkheid wordt zo goed dat men dergelijke berekeningen kan gebruiken om verschillende scenario’s over de samenstelling van ons heelal te controleren.

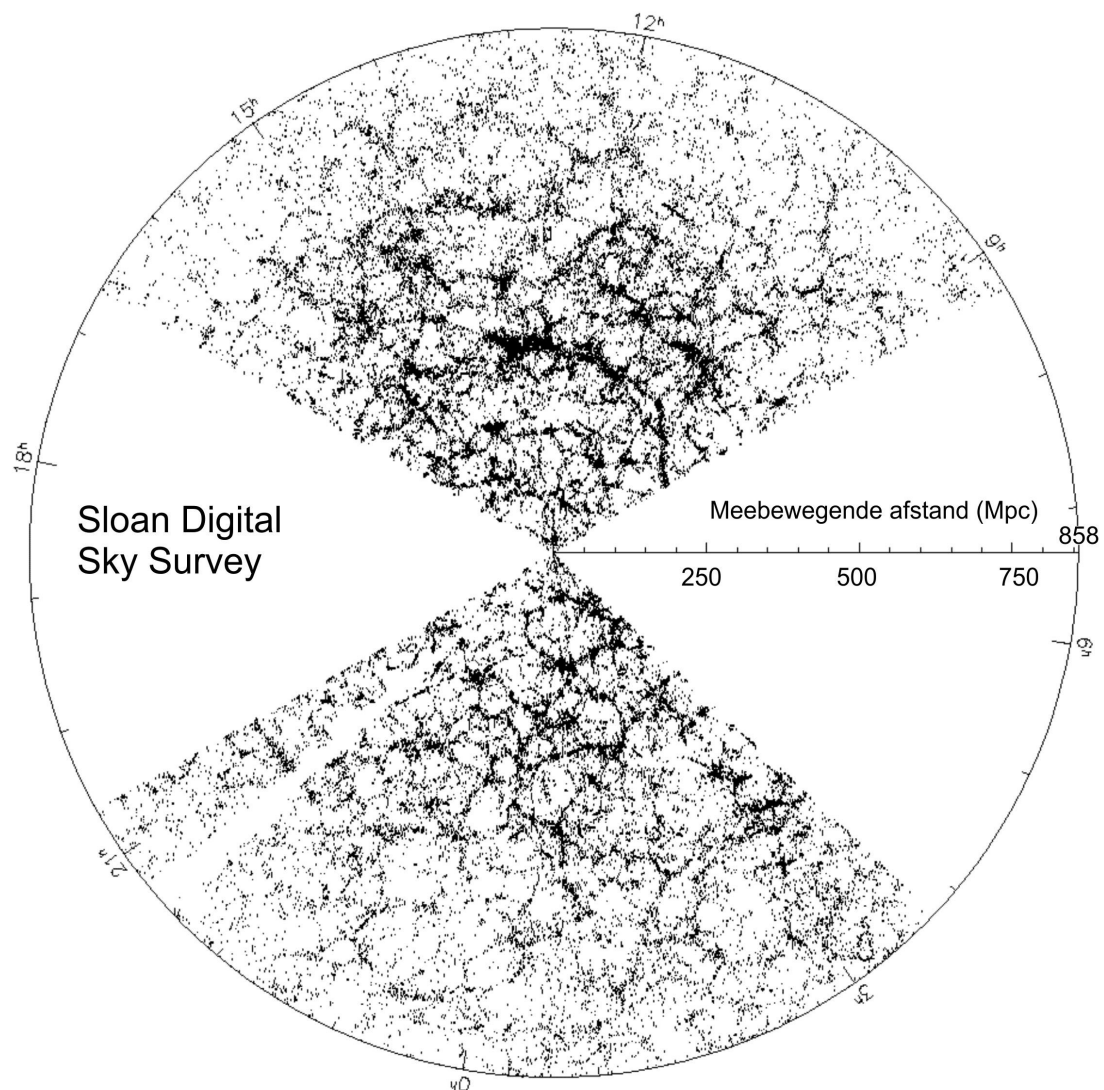
8.1 Het ontstaan van structuur

De nu waargenomen structuur moet het gevolg zijn van minieme fluctuaties in de dichtheid van het vroege heelal. Dat die fluctuaties zo klein waren volgt uit de waargenomen eigenschappen van de kosmische achtergrondstraling. De temperatuur van die straling vertoont minieme fluctuatie met een amplitude δT gelijk aan

$$\delta T \sim 0,0001 \text{ K} \approx 3 \times 10^{-5} T . \quad (8.1.1)$$

Omdat in gassen dichtheidsfluctuaties (compressies of lokale verdunningen) altijd gepaard gaan met temperatuursfluctuaties weten we dat rond het moment van het ontstaan van de achtergrondstraling de dichtheidsfluctuaties een amplitude hadden niet groter dan

$$\delta \rho \approx \left(\frac{\delta T}{T} \right) \rho \approx 3 \times 10^{-5} \rho . \quad (8.1.2)$$



Figuur 8.1: De verdeling van sterrenstelsels in twee 'taartpunten' aan de hemel, zoals gezien door de Sloan Digital Sky Survey. De figuur laat de sterrenstelsels zien tot een afstand van ruim 800 Mpc.

Het heeft daarom zin te kijken naar de vraag onder welke omstandigheden dergelijke kleine dichtheidswisselingen in amplitude kunnen groeien. Dit probleem (maar dan voor een statisch heelal) werd al in 1923 bekeken door de Engelse fysicus Sir James Jeans. In wat volgt gebruiken wij een vergelijkbare analyse.

8.2 Jeans lengte en Jeans massa

Bekijk een isotroop heelal dat uniform is gevuld met materie. Een dergelijk heelal kent geen voorkeursrichting of voorkeurspositie. Dat betekent meteen dat de lokale zwaartekrachtsversnelling moet verdwijnen¹:

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi = 0 . \quad (8.2.1)$$

Als \mathbf{g} niet zou verdwijnen zou de richting van de vector \mathbf{g} een voorkeursrichting definiëren.

Deze laatste voorwaarde leidt al meteen tot een probleem: bovenstaande relatie betekent $\Phi = \text{constant}$, en dat is in tegenspraak met de bronvergelijking voor de zwaartekracht (Poisson's vergelijking):

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G \rho . \quad (8.2.2)$$

Alleen in een leeg heelal, met $\rho = 0$, zijn deze twee vergelijkingen in overeenstemming! Dit laat al zien dat de Newtonse theorie van de zwaartekracht niet adequaat is in deze situatie. Ter geruststelling: in de correcte relativistische beschrijving treedt dit probleem niet op.

We passen om deze reden dezelfde kunstgreep toe als Jeans²: we nemen aan dat *alle* zwaartekracht afkomstig is van de *fluctuaties* in de dichtheid in plaats van de hele dichtheid. Bekijk een fluctuatie in de dichtheid gelijk aan $\delta\rho$, met een typische afmeting L . Voor het gemak nemen wij aan dat het een bolvormige massaconcentratie $\delta M > 0$ betreft, met een straal L . De 'extra' massa is dan gelijk aan

$$\delta M \simeq \frac{4\pi}{3} \delta\rho L^3 . \quad (8.2.3)$$

De zwaartekrachtsversnelling aan de rand van de concentratie heeft een grootte

$$|\delta\mathbf{g}| = \frac{G \delta M}{L^2} = \frac{4\pi G}{3} \delta\rho L . \quad (8.2.4)$$

De zwaartekrachtsversnelling is gericht naar het centrum van de massaconcentratie, en correspondeert met een kracht $(\rho + \delta\rho) \delta\mathbf{g} \simeq \rho\delta\mathbf{g}$ op het gas.

¹We gebruiken Newtonse zwaartekracht.

²Dit noemt met soms de *zwendel van Jeans*.

De toename van de dichtheid in een diffuus gas leidt altijd ook tot een druktoename δP ter grootte

$$\delta P = \frac{dP}{d\rho} \delta\rho \equiv C_s^2 \delta\rho. \quad (8.2.5)$$

De grootte $C_s = \sqrt{dP/d\rho}$ is de *adiabatische geluidsnelheid*. Het gas ondervindt behalve de zwaartekracht richting het centrum van de concentratie ook een drukkracht die juist van de concentratie af wijst, in grootte gelijk aan

$$|\nabla P| = C_s^2 |\nabla \delta\rho| \simeq \frac{C_s^2 \delta\rho}{L}. \quad (8.2.6)$$

De laatste schatting geldt wederom aan de rand van de massaconcentratie, en gebruikt dat $|\nabla \delta\rho| \simeq \delta\rho/L$.

Voor gegeven $\delta\rho$ neemt de zwaartekracht ten gevolge van de massaconcentratie toe als functie van de afmeting L als $\rho|\delta g| \propto L$, maar de grootte van de drukkracht neemt juist af als $|\nabla P| \propto L^{-1}$. Voor voldoende grote afmeting L overvleugelt de aantrekkende zwaartekracht daarom de drukkracht. Een massaconcentratie kan groeien als de naar binnen gericht zwaartekracht groter is dan de naar buiten gerichte drukkracht:

$$\rho|\delta g| = \frac{4\pi G\rho}{3} \delta\rho L > \frac{C_s^2 \delta\rho}{L}. \quad (8.2.7)$$

Hier is gebruikt dat $\delta\rho \ll \rho$ en daarom is een term $\propto \delta\rho^2$ verwaarloosd. In dat geval wordt er meer massa van buiten aangetrokken. Conditie (8.2.7) laat zien dat voldoende uitgebreide massaconcentraties kunnen groeien: hun afmeting moet voldoen aan

$$L > L_{\min} = \left(\frac{3C_s^2}{4\pi G\rho} \right)^{1/2}. \quad (8.2.8)$$

Merk op dat dit criterium *niet* afhangt van de grootte $\delta\rho$ van de dichtheidverstoring. De *Jeans lengte* wordt gedefiniëerd als

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{\pi C_s^2}{G\rho}}. \quad (8.2.9)$$

Bovenstaande conditie correspondeert met $L > \sqrt{3/4\pi^2} \lambda_j$, of met een straal van de sferische massaconcentratie gelijk and $r = 2L = \sqrt{3/\pi^2} \lambda_j \simeq 0.55 \lambda_j$. De Jeans lengte geeft daarom bij benadering de minimum afmeting van een massaconcentratie wil deze verder groeien zodat $\delta\rho$ toeneemt. Uiteindelijk storten die gebieden onder het eigen gewicht in.

Massaconcentraties met $L < L_{\min}$ hebben daarentegen de neiging om weer te expanderen, waardoor $\delta\rho$ afneemt. Op kleine schaal gedragen massafluctuaties zich daarom min of meer als geluidsgolven.

De *baryonische Jeans massa* M_j is de totale massa in de vorm van baryonen (waterstofkernen, heliumkernen) die is ingesloten in een bol met straal λ_j . Nemen we dichtheid aan baryonen ρ_{ba} dan geldt:

$$M_j = \frac{4\pi}{3} \rho_{\text{ba}} \lambda_j^3 . \quad (8.2.10)$$

Met uitdrukking (8.2.9) voor λ_j wordt dit:

$$M_j = \frac{4\pi^{5/2} \rho_{\text{ba}} C_s^3}{3G^{3/2} \rho^{3/2}} . \quad (8.2.11)$$

Dit is de typische baryonische massa van een gebied dat spontaan kan instorten ten gevolge van een kleine fluctuatie in de dichtheid. Het zijn de bayonen die later de zichtbare sterrenstelsels en clusters vormen, vandaar het belang van deze massa. Vanaf nu spreek ik gewoon van de Jeans massa.

In **Kader 16** op de volgende pagina's wordt een alternatieve afleiding gegeven voor de Jeans lengte die is gebaseerd op een energie-argument.

Kader 16: Een alternative afleiding van de Jeans lengte λ_j .

Bekijk een homogene wolk waterstofgas met een constante dichtheid: $\rho = nm_{\text{H}}$, met n de deeltjesdichtheid en m_{H} de massa van een waterstofatoom. Het waterstofgas heeft een temperatuur T . Isoleer in het gas een bolvormig gebied met straal a . Een bolschil rond het middelpunt van de wolk, gelegen tussen een straal r en een straal $r + dr$, bevat een massa gelijk aan

$$dm(r) = 4\pi r^2 \rho dr . \quad (8.2.12)$$

Voor gegeven temperatuur T is de thermische energie *per massa-eenheid* gelijk aan $e_{\text{th}} = 3k_{\text{b}}T/2m_{\text{H}}$, en de gravitationele potentiële energie per massa-eenheid is $V(r) = -Gm(r)/r$, de potentiaal ten gevolge van de aantrekkende werking van alle massa in de wolk binnen een straal r . De totale energie e_{tot} per massa-eenheid is

$$e_{\text{tot}} = e_{\text{th}} + V(r) = \frac{3}{2} \frac{k_{\text{b}}T}{m_{\text{H}}} - \frac{Gm(r)}{r} , \quad (8.2.13)$$

met $m(r) = (4\pi/3)\rho r^3$ de totale massa binnen een straal r . De totale energie van de wolk wordt gegeven door een integraal over alle massa-schillen van de energie per massa-eenheid:

$$\begin{aligned} W(a) &= \int_0^M dm(r) e_{\text{tot}} \\ &= \int_0^a dr 4\pi r^2 \rho \left[\frac{3}{2} \frac{k_{\text{b}}T}{m_{\text{H}}} - \frac{Gm(r)}{r} \right] . \end{aligned} \quad (8.2.14)$$

Hier is $M = (4\pi/3)\rho a^3$ de *totale* massa van de wolk. Uitvoeren van de integratie levert de volgende uitdrukking voor de totale energie $W(a)$:

$$W(a) = \frac{3}{2} MRT - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{a} \equiv W_{\text{th}} + W_{\text{gr}} . \quad (8.2.15)$$

Hier is $\mathcal{R} = k_{\text{b}}/m_{\text{H}}$ de *universele gasconstante*. W_{th} is de totale thermische energie van de wolk, en W_{gr} de (negatieve) gravitationele bindingsenergie.

We laten nu de wolk een beetje inkrimpen, zodat de straal verandert van a naar $a - \Delta a$, met $0 < \Delta a \ll a$. Daardoor verandert de energie $W(a)$ met een hoeveelheid ΔW : de energie wordt gelijk aan

$$W(a - \Delta a) = W(a) + \Delta W . \quad (8.2.16)$$

Omdat de meest waarschijnlijke toestand in een fysische systeem die van minimale energie is, kunnen we uit het *teken* van ΔW de *stabiliteit* van de wolk bepalen:

- $\Delta W > 0$: inkrimpen kost energie, de wolk is stabiel,
- $\Delta W < 0$: inkrimpen leidt tot een lagere energie: de wolk is instabiel en stort in.

Volgens de wetten van de thermodynamica verandert de thermische energie van een gas met druk $P = nk_b T = \rho \mathcal{R} T$ bij een kleine volumeverandering $\Delta \mathcal{V} = 4\pi a^2 \Delta a$ als

$$\Delta W_{\text{th}} = -P \Delta \mathcal{V} \approx \rho \mathcal{R} T 4\pi a^2 \Delta a , \quad (8.2.17)$$

mits er geen warmte wordt toegevoerd of onttrokken aan het gas: het adiabatische geval. De massa M van de wolk verandert door het inkrimpen niet: er geldt immers massabehoud. Daarom is de verandering van de gravitationele bindingsenergie gelijk aan

$$\Delta W_{\text{gr}} \approx \left(\frac{\partial W_{\text{gr}}}{\partial a} \right) \times (-\Delta a) = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{a^2} \Delta a . \quad (8.2.18)$$

Daaruit volgt dat de verandering $\Delta W = \Delta W_{\text{th}} + \Delta W_{\text{gr}}$ gegeven is door:

$$\Delta W \approx \left(3M\mathcal{R}T - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{a} \right) \times \left(\frac{\Delta a}{a} \right) . \quad (8.2.19)$$

Met behulp van de relatie $M = (4\pi/3)\rho a^3$ kan men schrijven:

$$\Delta W = 3M\mathcal{R}T \left(1 - \frac{a^2}{\tilde{\lambda}_j^2} \right) \frac{\Delta a}{a} . \quad (8.2.20)$$

Deze energieverandering is negatief als de straal a van de wolk groter is dan de kritische waarde $\tilde{\lambda}_j$, vrijwel gelijk aan de eerder gedefiniëerde *Jeans-lengte*. Sferische wolken met $a > \tilde{\lambda}_j$ storten spontaan onder hun eigen gewicht in omdat de drukkrachten onvoldoende weerstand bieden.

De Jeans lengte $\tilde{\lambda}_j$ in deze uitdrukking wordt gegeven door^a

$$\tilde{\lambda}_j = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \left(\frac{\mathcal{R}T}{G\rho} \right)^{1/2} \approx \frac{s}{\sqrt{G\rho}}. \quad (8.2.21)$$

De Jeans lengte geeft de minimale schaal van gebieden die spontaan, onder invloed van hun eigen waartekracht, kunnen instorten en zo dichtheidsconcentraties kunnen vormen. In deze uitdrukking is $s \equiv \sqrt{\mathcal{R}T} = \sqrt{k_b T / m_p}$ de *isotherme geluidsnelheid* in waterstofgas.

^a $\sqrt{15/4\pi} \approx 1.0925$

8.2.1 Het gedrag van de Jeans lengte en de Jeans massa

In de definitie van de Jeans massa en Jeans lengte speelt de geluidsnelheid een belangrijke rol. Deze snelheid is altijd van de orde

$$C_s \approx \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{w} c. \quad (8.2.22)$$

Heel vroeg in het heelal, als de dichtheid nog wordt gedomineerd door straling, geldt $P \approx \rho c^2 / 3$, $w \approx 1/3$ en

$$C_s \approx \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (8.2.23)$$

De geluidsnelheid van een stralingsgas is $1/\sqrt{3} \approx 0,58$ maal de lichtsnelheid (zodat $C_s \sim 200,000$ km/s), en is vrijwel constant. In een vlak heelal als het onze geldt in de stralingsgedomineerde fase

$$R(t) \propto t^{1/2}, \quad H = \frac{1}{2t}, \quad \rho = \frac{3H^2}{8\pi G} \propto t^{-2}, \quad \rho_{\text{ba}} \propto t^{-3/2}. \quad (8.2.24)$$

De derde gelijkheid is de vlakheidsconditie, waar de bijdrage aan de dichtheid van Donkere Energie en stof kan worden waarloosd. De schaling van ρ_{ba} volgt uit $\rho_{\text{ba}} = n_{\text{ba}} m_{\text{ba}} \propto R^{-3}$, de verdunningswet voor niet-relativistische baryonen.

Uit deze schaling en het resultaat voor C_s volgt meteen:

$$\lambda_j \propto t, \quad M_j \propto t^{3/2}. \quad (8.2.25)$$

Jeans lengte en Jeans massa nemen in de stralingsfase toe naarmate het heelal ouder wordt. Het gedrag van de Jeans lengte, $\lambda_j \propto t$, betekent dat de Jeans lengte een vaste fractie is van de horizonschaal, gelijk aan $d_{\text{hor}} \simeq 2ct = c/H$ in een stralingsgedomineerd heelal. Er geldt:

$$\frac{\lambda_j}{d_{\text{hor}}} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}} \frac{C_s}{c} = \sqrt{\frac{8\pi^2 w}{3}} \simeq 3, \quad (8.2.26)$$

waar Friedmann's vergelijking voor een vlak heelal gebruikt is in de vorm $H = \sqrt{8\pi G \rho/3}$, samen met $C_s \simeq c/\sqrt{3}$ ($w = 1/3$). Dit laat al zien dat in deze situatie een meer preciese relativistische berekening eigenlijk op zijn plaats is.

Als het heelal ongeveer 50,000 jaar oud is, bij een temperatuur van $\sim 10^4$ K, begint de dichtheid van materie (stof) te overheersen. Korte tijd later wordt het heelal doorzichtig, en zijn de fotonen niet langer gekoppeld aan de rest van het heelal. Zij dragen dan niet langer bij aan de geluidssnelheid. Overigens: de bijdrage van Donkere Energie aan de dichtheid kan rond die tijd nog steeds worden verwaarloosd.

In de periode die volgt is de geluidssnelheid ruwweg de thermische snelheid van de baryonen, grotendeels een gas van waterstofkernen met massa m_p en een temperatuur T_b :

$$C_s \simeq \sqrt{\frac{k_b T_b}{m_p}} \ll c. \quad (8.2.27)$$

Formeel correspondeert dit met een w -parameter gelijk aan

$$w \simeq \frac{k_b T_b}{m_p c^2} \simeq 10^{-9} \left(\frac{T_b}{10^4 \text{ K}} \right) \ll 1. \quad (8.2.28)$$

De ontkoppeling van fotonen leidt dus tot een enorme reductie van de w -parameter, die kort daarvoor nog $w \simeq 1/3$ was. Uit (8.2.22) volgt dan gelijk dat de geluidssnelheid en de Jeans lengte met een factor $\sim 20,000$ afneemt, en de Jeans massa maar liefst met een factor $\sim 10^{13}$!

In het gas van baryonen daalt de temperatuur van het baryongas als³

$$T_b \propto R^{-2}, \quad (8.2.29)$$

en het heelal voldoet aan

$$R(t) \propto t^{2/3}, \quad H = \frac{2}{3t}, \quad \rho \simeq \rho_{ba} = \frac{3H^2}{8\pi G} \propto t^{-2}, \quad T_b \propto t^{-4/3}. \quad (8.2.30)$$

Die sterke daling van de baryontemperatuur is het gevolg van het feit dat de baryonimpuls schaalt als $p \propto R^{-1}$ (net als bij fotonen), maar de kinetische energie afneemt als $E_{\text{kin}} = p^2/2m \propto R^{-2}$.

In deze periode geldt $C_s \propto \sqrt{T_{ba}} \propto t^{-2/3}$ en schalen de Jeans lengte en de Jeans massa als:

$$\lambda_j \propto t^{1/3}, \quad M_j \propto t^{-1}. \quad (8.2.31)$$

De Jeans lengte neemt weliswaar toe, maar langzamer dan voorheen en bovendien startend, vlak naar de ontkoppeling van fotonen, met een veel kleinere waarde. De Jeans massa neemt in deze periode echter verder af! Onderstaande figuur 8.2 illustreert dit gedrag van de Jeans massa M_j . Direct na de ontkoppeling van fotonen is de Jeans massa nog maar ongeveer $10^5 M_\odot$, ruwweg de massa van een flinke bolhoop of van de kleinste dwerg-melkwegstelsels die wij kennen.

³Let op: de temperatuur van het stralingsgas voldoet nog steeds aan de roodverschuivingswet zodat $T_{\text{str}} \propto R^{-1}$!

8.2.2 Foton-wrijving

Zolang fotonen noch effectief botsen met de elektronen (bij iedere waterstofkern hoort één elektron, bij iedere heliumkern twee) oefenen zij een wrijvingskracht uit op het gas van baryonen als geheel. Deze kracht treedt op als de baryonen bewegen ten opzichte van het stralingsveld. Dit komt simpelweg omdat de elektronen met hun negatieve lading sterk gekoppeld zijn aan de positief geladen atoomkernen door de onderlinge elektrische aantrekkingskracht: elektronen en atoomkernen bewegen om die reden samen.

Het principe achter deze wrijving is simpel te illustreren met behulp van een één-dimensionaal voorbeeld. Stel: er zijn even veel fotonen die naar links bewegen, als naar rechts bewegen:

$$n_L = n_R = \frac{1}{2}n, \quad (8.2.32)$$

met n de totale fotonendichtheid (het aantal fotonen per kubieke meter). Alle fotonen hebben dezelfde golflengte λ . Deze situatie is het equivalent van een isotroop stralingsgas in één dimensie. Deze fotonen worden verstrooid door de elektronen, die zo de foton-impuls $p = h/\lambda$ absorberen⁴. Als een elektron stil staat ondervindt het geen netto kracht: het verstrooit even veel van links komende fotonen als van rechts komende fotonen.

Nu laten we het elektron met een snelheid $V \ll c$ naar rechts bewegen. Door de Dopplerverschuiving ‘ziet’ het elektron de van links en van rechts komende fotonen met respectievelijk een kortere en een langere golflengte:

$$\lambda_L = \lambda \left(1 - \frac{V}{c}\right), \quad \lambda_R = \lambda \left(1 + \frac{V}{c}\right). \quad (8.2.33)$$

Daardoor is de impuls van de fotonen van links en van rechts niet langer gelijk:

$$p_L = \frac{h}{\lambda_L} \simeq \frac{h}{\lambda} \left(1 + \frac{V}{c}\right), \quad p_R = \frac{h}{\lambda_R} \simeq \frac{h}{\lambda} \left(1 - \frac{V}{c}\right). \quad (8.2.34)$$

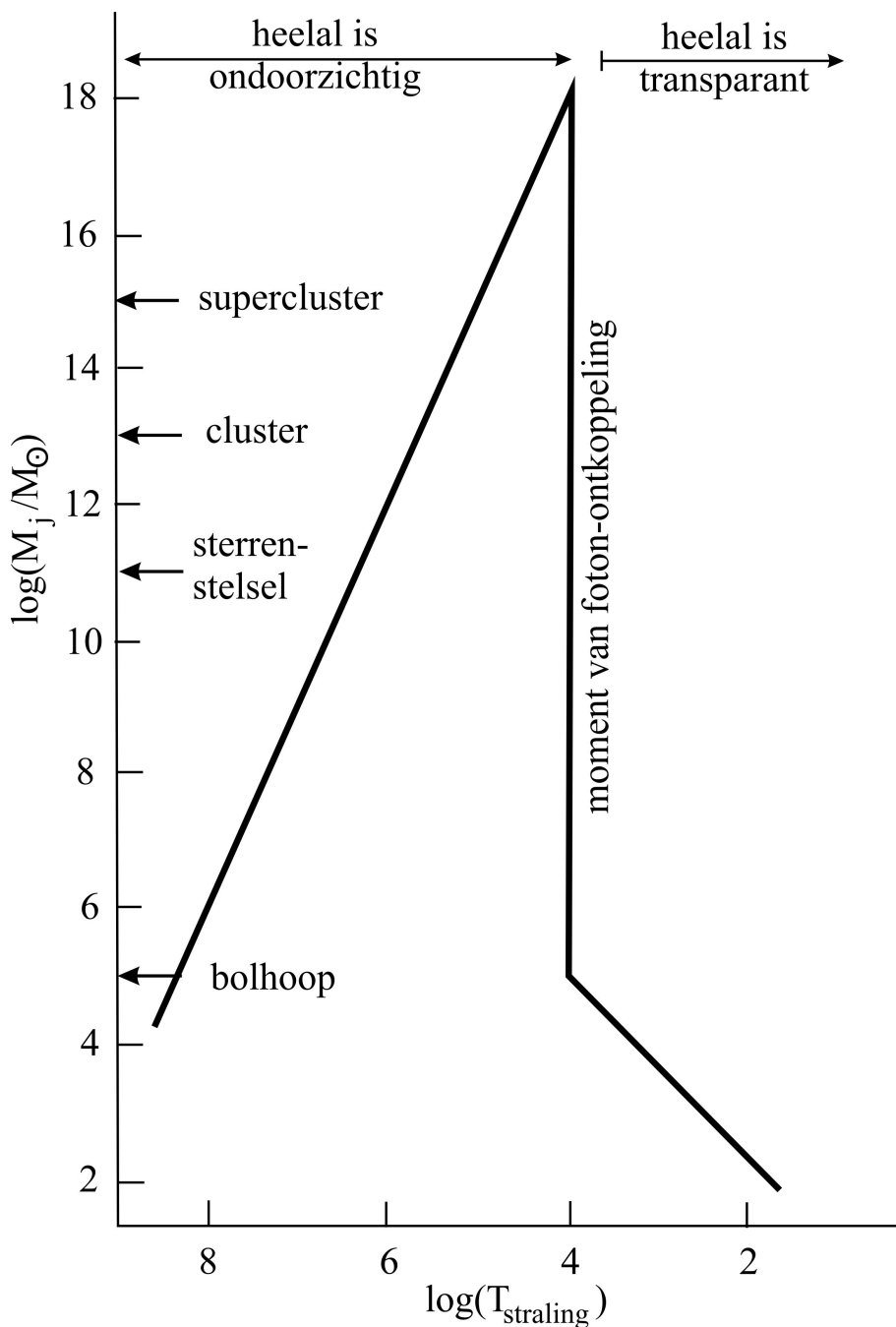
Hier is gebruik gemaakt van de relatie

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1-x \quad \text{als } |x| \ll 1.$$

De conclusie is dat de tegemoetkomende fotonen een grotere impuls hebben dan de fotonen die het elektron inhalen.

Wederom voor $V \ll c$ is het aantal botsingen van links en van rechts nog steeds vrijwel gelijk. Het verschil is van orde V^2/c^2 en wordt hier verwaarloosd.

⁴Weliswaar dragen de verstrooide fotonen weer impuls weg, maar omdat de verstrooiing in beide richtingen even waarschijnlijk is levert dit gemiddeld geen netto impulsverlies op.



Figuur 8.2: Het verloop van de Jeans massa M_j in baryonen in eenheden van de zonsmassa $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}$ kg, uitgezet als functie van de stralingstemperatuur in Kelvin. Op beide assen wordt een logarithmische schaal gebruikt. Merk de enorme reductie van de Jeans massa op op het moment dat het heelal doorzichtig wordt, en de fotonen ontkoppelen. Een aantal representatieve sterrenkundige massa's staat aangegeven.

Dat betekent dat er *gemiddeld per botsing* een hoeveelheid impuls

$$\Delta p = \frac{1}{2}(p_L - p_R) = \frac{h}{\lambda} \frac{V}{c} \quad (8.2.35)$$

aan het elektron wordt overgedragen, in de richting tegen de bewegingsrichting in (in het voorbeeld: naar links). Het aantal fotonbotsingen per seconde en per elektron is bij een fotondichtheid n gekijk aan $nc \sigma_T$, met $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-29} \text{ m}^2$ de werkzame doorsnede (Thomson doorsnede) voor foton-verstrooiing. De netto kracht per elektron is gelijk aan

$$\begin{aligned} F_d &= (\text{aantal botsingen per seconde}) \times (\text{impulsoverdracht per botsing}) \\ &= nc \sigma_T \Delta p = \frac{h}{\lambda} n \sigma_T V . \end{aligned} \quad (8.2.36)$$

Net zoals een gewone wrijvingskracht werkt deze de beweging tegen, en is zij evenredig met de bewegingsnelheid. De gemiddelde energie per foton is $\mathcal{E} = hc/\lambda$ en de energiedichtheid is $n\mathcal{E} = nhc/\lambda = \epsilon_{\text{straling}}$. We kunnen dus de kracht per elektron schrijven als

$$F_d = \sigma_T \epsilon_{\text{straling}} \left(\frac{V}{c} \right) . \quad (8.2.37)$$

Deze formule blijft ook geldig voor een verzameling fotonen met verschillende golflengtes. Een meer preciese berekening in drie dimensies levert een extra factor $4/3$ op in de uitdrukking voor F_d .

Deze fotonwrijving zorgt er voor dat baryonen voor de foton-ontkoppeling, wanneer elektron-foton botsingen nog frequent zijn, moeilijker massa-concentraties vormen: het werkt de inval onder invloed van de zwaartekracht tegen. Daarom beginnen opeenhopingen van baryonen pas na de ontkoppeling sterk te groeien. Voor donkere materie, dat behalve zwaartekracht nauwelijks wisselwerkingen vertoont, geldt die beperking niet. Daarom beginnen alle massa-opeenhoppingen in het heelal waarschijnlijk als 'klonten' donkere materie, die later met hun zwaartekracht de (nu) zichtbare baryonen uit de omgeving invangen. Die baryonen zitten nu in de zichtbare sterren en sterrenstelsels.

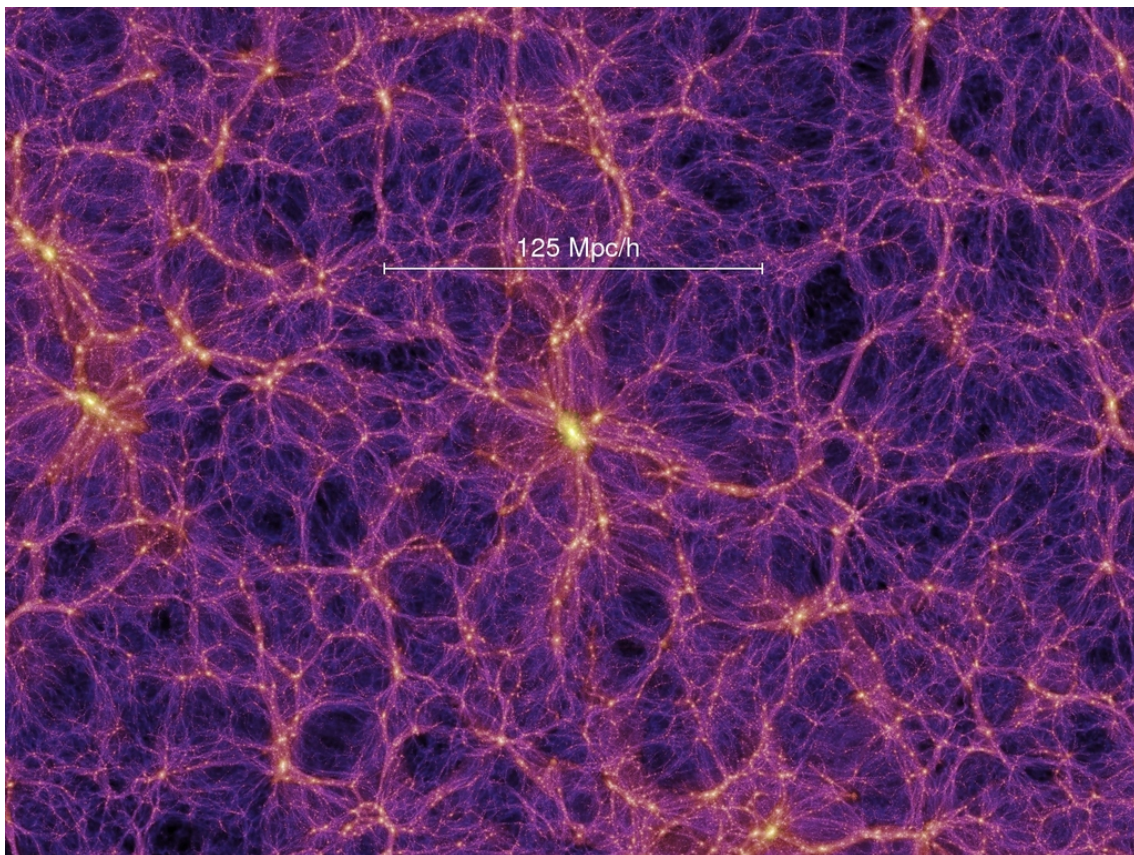
8.3 Na het eerste begin...

In het voorgaande is geschetst hoe de eerste massa-opeenhopingen zich kunnen vormen, in het stadium dat de bijbehorende dichtheidsfluctuaties nog relatief klein zijn. Is het proces eenmaal in gang gezet, dan zijn simpele berekeningen vaak niet langer toereikend. Men moet zijn toevlucht nemen tot complexe computerberekeningen die allerlei factoren in rekening brengen, zoals:

- de expansie van het heelal,
- de gravitationele koppeling tussen zichtbare en donkere materie,
- het effect op het gas van de vorming van de eerste sterren

etcetera. Een voorbeeld van een dergelijke berekening staat in figuur 8.3.

De voortgang in deze tak van onderzoek is in het laatste decennium snel gegaan: men is nu in staat gedetailleerde vergelijkingen te maken tussen wat men ziet aan de hemel op de grootse schalen (1 Mpc - 100 Mpc, de verdeling getoond in figuur 8.1) en wat men weet over de bouw van clusters en melkwegstelsels op schalen van 1 kpc-1 Mpc. Deze berekeningen geven een goede weergave van de werkelijkheid mits men uitgaat van een zogenaamde **Λ CDM kosmologie**: een heelal met een kosmologische constante Λ en koude donkere materie (*Cold Dark Matter*). Donkere materie is 'koud' als de samenstellende deeltjes voldoende zwaar zijn zodat de thermische snelheid veel kleiner is dan de (bijvoorbeeld) de baansnelheid van deze deeltjes in ons Melkwegstelsel. Dit betekent dat zij relatief zwaar moeten zijn (dat wil zeggen: veel zwaarder dan een proton).



Figuur 8.3: Een voorbeeld van een moderne computersimulatie van de grote-schaal structuur van het heelal. Foto: Max Planck Instituut für Astrophysik, München.

Hoofdstuk 9

Successen en problemen van het Oerknalmodel

9.1 De successen: een recapitulatie

Het beeld van een expanderend en steeds verder afkoelend heelal dat het Oerknalmodel ons schetst is eigenlijk verassend succesvol. Op dit moment zijn er geen waarnemingen bekend die met dit beeld regelrecht in tegenspraak zijn. De al eerder genoemde belangrijkste successen van het model kunnen als volgt worden samengevat:

1. De natuurlijke verklaring van de 3K achtergrondstraling als het nagloeien van de Oerknal.
2. De verklaring voor de vorming van lichte elementen (zoals deuterium, helium en lithium) door kernfusie in het vroege, hete heelal.
3. De eenvoudige verklaring voor de vluchtsnelheid van de verre sterrenstelsels: de wet van Hubble.

9.2 De problemen

Toch kent het model een drietal problemen die wellicht een verdere aanpassing en meer studie vereisen. Kort samengevat:

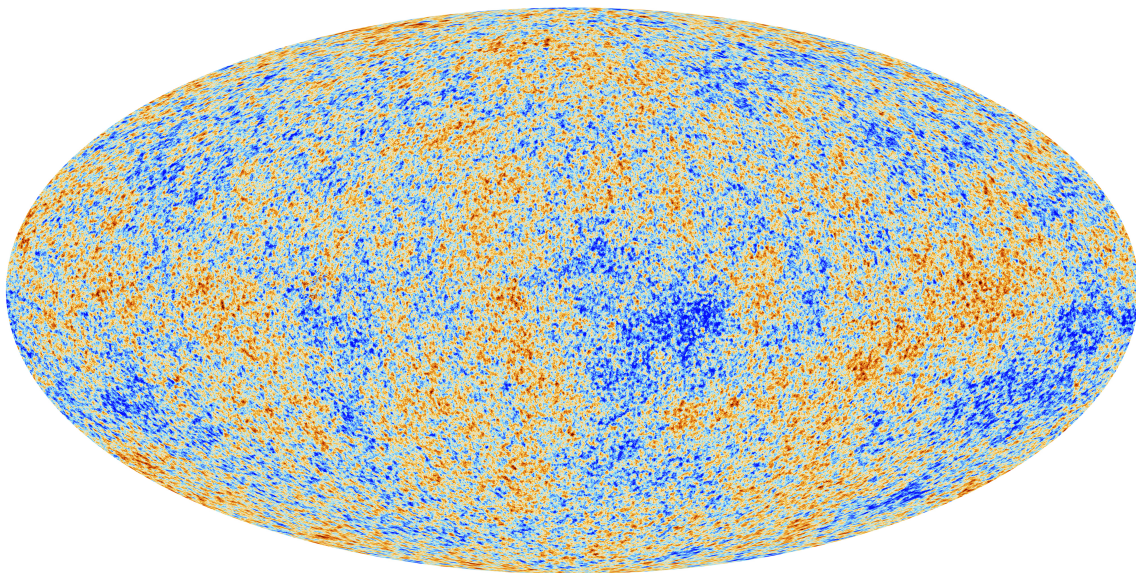
1. **Het horizonprobleem.** Waarom is ons heelal op grote schaal min-of-meer uniform, zelfs in die eigenschappen die zijn vastgelegd toen ons heelal veel jonger was, met een veel kleinere horizonafstand;
2. **Het vlakheidsprobleem.** Waarom is ons heelal (vrijwel) vlak, een wel heel speciale keuze in de mogelijke heelalmodellen;
3. **Het samenstellingsprobleem:** wat bepaalt de inhoud van het heelal, en in het bijzonder:

- Wat is de samenstelling van de donkere materie;
- Wat bepaalt de grootte van de kosmologische constante (vacuümdichtheid).

9.2.1 Het horizonprobleem

Het horizonprobleem is het best te illustreren aan de hand van de eigenschappen van de kosmische achtergrondstraling. Deze straling ontstond toen ons heelal zo'n 300,000 jaar oud was. De toenmalige horizonafstand is gelijk is aan $D_{\text{hor}} \sim 1$ miljoen lichtjaar. Gebieden die toen verder dan die afstand uit elkaar stonden konden niet met elkaar communiceren, want niets gaat sneller dan het licht. Er is dan ook geen enkele reden waarom op dat moment dergelijke gebieden gelijke omstandigheden (dichtheid, temperatuur, ...) zouden moeten kennen.

De toenmalige horizonafstand van ~ 1 miljoen lichtjaar correspondeert tegenwoordig met een hoekmaat aan de hemel van ongeveer één graad: twee keer de diameter van de volle Maan. Als we dus naar gebieden kijken die meer dan één graad uit elkaar liggen kijken we dus naar gebieden die elkaar niet konden zien of beïnvloeden toen de kosmische achtergrondstraling ontstond. Er is dan ook geen enkele reden waarom er geen grote verschillen zouden zijn in de temperatuur van de straling afkomstig uit die gebieden. De hemel in het licht van de achtergrondstraling is in de laatste twintig jaar in steeds meer detail in kaart gebracht. Figuur (9.1) geeft de beste nu beschikbare kaart van de hemel.



Figuur 9.1: Een kaart van de hele hemel in het licht van de kosmische achtergrondstraling, gemaakt met het PLANCK experiment aan boord van een satelliet van de Europese ruimtevaartorganisatie ESA. De verschillende kleuren geven de gemeten temperatuur, maar de variaties rond de gemiddelde temperatuur, $\langle T \rangle \approx 2.7$ °K zijn miniem, met een amplitude $\delta T \approx 0.0001$ °K.

Uit die waarnemingen blijkt dat er helemaal geen grote temperatuursverschillen bestaan tussen verschillende gebieden aan de hemel. Sterker nog: de temperatuur wijkt overal maar miniem af van het gemiddelde, met de temperatuursverschillen kleiner dan $1/10.000^\circ$ van de gemiddelde temperatuur. In het standaard Oerknalmodel is dat vanwege het bestaan van een horizon niet vanzelfsprekend: er lijkt sprake van *onderlinge afstemming zonder enige communicatie!*

De relatie met de dynamica van het heelal

In hoofdstuk 7.4 is de horizon geïntroduceerd als de maximale afstand die het licht kan afleggen gedurende het bestaan van het heelal. Relatie (7.4.1) geeft, als we $R_0 = 1$ kiezen, de huidige horizon afstand als:

$$D_{\text{hor}}(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{cdt}{R(t)}. \quad (9.2.1)$$

Op een willekeurig ander tijdstip geldt:

$$D_{\text{hor}}(t) = R(t) \int_0^t \frac{cdt'}{R(t')}. \quad (9.2.2)$$

Dit is de maximale afstand die licht kan reizen in een expanderend heelal als het zijn reis begint bij de Oerknal op $t = 0$.

De tweede karakteristieke afstand is de Hubble straal D_H :

$$D_H = \frac{c}{H}. \quad (9.2.3)$$

Dit is de afstand die het licht kan afleggen in de typische expansie-tijd van het heelal: de Hubble tijd $t_H = 1/H$.

In simpele heelalmodellen, zoals het vlakke materie- of stralingsgedomineerd heelal, geldt dat de horizonafstand D_{hor} ruwweg (binnen een factor 1-2) gelijk is aan de Hubble-straal D_H :

$$D_{\text{hor}}(t) \sim ct \sim \frac{c}{H} \equiv D_H. \quad (9.2.4)$$

Dit is een simpel gevolg van de relatie $H \sim 1/t$ in dergelijke modellen.

Bij iedere fysische afstand D hoort een meebewegende afstand D/R die constant is voor objecten die passief meedoen met de expansie van het heelal. Als we $R_0 = 1$ stellen is de meebewegende afstand van zo'n object gelijk aan de huidige fysische afstand.

Ook voor de horizonafstand en de Hubble-straal kan men formeel een meebewegende (maar in dit geval **géén** vaste!) afstandsschaal definiëren. Met de horizonafstand correspondeert een meebewegende horizonafstand

$$r_{\text{hor}}(t) = \frac{D_{\text{hor}}(t)}{R(t)} = \int_0^t \frac{cdt'}{R(t')} . \quad (9.2.5)$$

De meebewegende horizonschaal groeit altijd:

$$\frac{dr_{\text{hor}}}{dt} \equiv \dot{r}_{\text{hor}} = \frac{c}{R(t)} . \quad (9.2.6)$$

De bij de Hubble-straal horende *meebewegende* afstand is

$$r_{\text{H}}(t) = \frac{D_{\text{H}}(t)}{R(t)} = \frac{c}{HR} = \frac{c}{\dot{R}} , \quad (9.2.7)$$

met $\dot{R} = dR/dt$. Dit is de *meebewegende Hubble-straal*. Deze grootheid voldoet aan de vergelijking

$$\frac{dr_{\text{H}}}{dt} \equiv \dot{r}_{\text{H}} = -\frac{c\ddot{R}}{\dot{R}^2} , \quad (9.2.8)$$

met $\ddot{R} \equiv d^2R/dt^2$. Uit (9.2.8) blijkt dat de meebewegende Hubble-straal groeit zolang als

$$\ddot{R} = \frac{d^2R}{dt^2} < 0 , \quad (9.2.9)$$

dat wil zeggen bij vertraagde expansie. Versnelt de expansie echter, zodat $\ddot{R} > 0$, dan wordt r_{H} kleiner! Men kan ook gebruik maken van de definitie van de Hubble parameter en schrijven

$$\dot{R} = HR , \quad \ddot{R} = H\dot{R} + \dot{H}R = (H^2 + \dot{H})R , \quad (9.2.10)$$

met $\dot{H} = dH/dt$, zodat

$$\dot{r}_{\text{H}} = -\frac{c}{R} \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) . \quad (9.2.11)$$

Bekijk nu een vlak heelal met $w = P/\rho c^2 \sim \text{constant}$.

Friedmann's vergelijkingen zijn dan (zie ook **Kader 13**):

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} \quad , \quad \ddot{R} = -\frac{4\pi G \rho}{3} R (1 + 3w) \quad . \quad (9.2.12)$$

Met de relaties in (9.2.10) volgt dan meteen

$$1 + \frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\ddot{R}}{H^2 R} = -\frac{1 + 3w}{2} \quad . \quad (9.2.13)$$

Relatie (9.2.8) wordt zo:

$$\dot{r}_H = \frac{c}{2R(t)} (1 + 3w) \quad . \quad (9.2.14)$$

We bekijken de inmiddels bekende grensgevallen:

$$\dot{r}_H = \begin{cases} \frac{c}{R} & \text{stralingsgedomineerd heelal:} & w = 1/3 ; \\ \frac{c}{2R} & \text{stof-gedomineerd heelal:} & w = 0 ; \\ -\frac{c}{R} & \text{donkere energie gedomineerd heelal:} & w = -1 . \end{cases} \quad (9.2.15)$$

In het stralingsgedomineerde heelal zijn de meebewegende horizonschaal en Hubble straal identiek: ze nemen even snel toe. Dat geldt dan ook voor de fysische horizonschaal en Hubble straal. In het door stof gedomineerde heelal is de meebewegende Hubble-straal de helft van de meebewegende horizonschaal: ze neemt half zo snel toe. Tenslotte: in een door donkere energie gedomineerd heelal (De Sitter heelal) neemt de *meebewegende* Hubble straal juist af! Dit is het gevolg van het feit dat een foton dat vertrekt richting een voldoende ver doel wordt geconfronteerd met het feit dat de expansie van het heelal er sneller extra ruimte (en afstand) bijmaakt per seconde dan de $\sim 300,000$ km die het foton in een seconde kan overbruggen. Vergelijking (9.2.14) laat zien dat een krimpende meebewegende Hubble straal optreedt als geldt:

$$w = \frac{P}{\rho c^2} < -\frac{1}{3} \quad . \quad (9.2.16)$$

Gewone materie heeft altijd een positieve druk ($w \geq 0$) maar meer geavanceerde modellen voor donkere energie (Inflatie-modellen) kunnen ruwweg gesproken alle waarden produceren in het bereik $-1 \leq w \leq 1$.

9.2.2 Het vlakheidsprobleem

Ook het **vlakheidsprobleem** is een afstemmingsprobleem: waarom kiest de natuur van alle mogelijke oplossingen nu juist de vlakke oplossing met $k = 0$ en $\Omega = 1$? Al die andere oplossingen zijn in principe even goede mogelijkheden.

Ook als je de onzekerheid in de waarnemingen, die zeggen dat

$$|\Omega_0 - 1| \leq 10^{-2}, \quad (9.2.17)$$

wilt gebruiken door te zeggen dat ons heelal niet echt vlak, maar *bijna vlak* is heb je nog steeds een probleem. De reden is als volgt. In typische klassieke Friedmann-modellen neemt de afwijking van vlakheid, hier weergegeven door de grootte $|\Omega - 1|$, tijdens de expansie toe als het heelal ouder wordt. Uit Friedmann's vergelijking (zie ook vergelijking 5.1.3) volgt dat

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{H^2 R^2} = \frac{|k|}{(dR/dt)^2}. \quad (9.2.18)$$

De grootte k is een constante, en in dergelijke Friedmann modellen neemt $(dR/dt)^2$ altijd af zolang het heelal expandeert, of wordt constant in open modellen als $t \rightarrow \infty$. Dat betekent dat $|\Omega - 1|$ moet toenemen! Omgekeerd: als je verder terug kijkt in het verleden neemt $|\Omega - 1|$ juist af. Tabel 7 op de volgende pagina illustreert dit treffend. Het vlakheidsprobleem kan daarom als volgt worden samengevat: als ons heelal nu vrijwel vlak is was het in het verleden nog veel vlakker!

Er is echter een grens aan hoe ver wij kunnen terugrekenen. Dit heeft te maken met een belangrijk manco in de moderne natuurkunde: het ontbreken van een quantumtheorie voor de zwaartekracht. Alle andere natuurkrachten (de sterke kernkracht, de zwakke kernkracht en de electromagnetische kracht) kunnen worden beschreven met de principes van de quantummechanica, of meer precies met *quantumveldentheorie*. Voor de zwaartekracht is dat nog niet gelukt. Men kan *wel* schatten wanneer quantummechanische effecten ook voor de zwaartekracht van belang worden, zie **Kader 17** onder. Voor ons heelal is dat op de Planck tijd, gegeven door

$$t_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}. \quad (9.2.19)$$

Als men helemaal tot dat punt terugrekent is de afwijking van vlakheid gelijk aan

$$|\Omega - 1|_{t_{\text{pl}}} \leq 2 \times 10^{-61}, \quad (9.2.20)$$

een belachelijk klein getal¹.

¹Zo ziet men maar weer: de sterrenkunde kent niet alleen belachelijk grote getallen, maar ook belachelijk kleine getallen!

Tabel 7: Gebeurtenissen in ons heelal volgens een Friedmann-Lemaitre standaardmodel: schaalfactor, tijdstip en de bijbehorende afwijking van vlakheid $|\Omega - 1|$.

Gebeurtenis (stralingstemperatuur)	Schaalfactor R	Tijdstip t	$ \Omega - 1 $
Huidig heelal (keuze: $R_0 = R(t_0) = 1$ en $T \approx 2,7$ K)	$R_0 = 1$	$1,4 \times 10^{10}$ jaar	$< 10^{-2}$
$\rho^{\text{stof}} = \rho^{\text{vac}}$ (materiedichtheid = vacuümdichtheid)	$R_\Lambda = 0,77$	$9,8 \times 10^9$ jaar	$< 5 \times 10^{-3}$
Vorming kosmische achtergrondstraling ($T \approx 3500$ K)	$R_{\text{bg}} \approx 9 \times 10^{-4}$	$3,5 \times 10^5$ jaar	$< 2 \times 10^{-5}$
$\rho^{\text{stof}} = \rho^{\text{straling}}$ ($T \approx 10^4$ K) (materiedichtheid = stralingsdichtheid)	$R_g = 3 \times 10^{-4}$	$4,7 \times 10^4$ jaar	$< 2 \times 10^{-6}$
Nucleosynthese ($T \sim 10^9$ K)	$R_{\text{sy}} \approx 3 \times 10^{-9}$	10^2 s	$< 10^{-16}$
Planck tijd ($T \approx 10^{32}$ K) (Klassieke zwaartekracht wordt geldig)	$R_{\text{pl}} \approx 2 \times 10^{-32}$	$5,4 \times 10^{-44}$ s	$< 2 \times 10^{-61}$

Kader 17: De Planck massa, Planck lengte en Planck tijd

Het is mogelijk een schatting te maken wanneer de klassieke (niet-quantummechanische) theorie van de zwaartekracht zijn geldigheid verliest. Bekijk een puntmassa M . Volgens de algemene relativiteitstheorie vervormt deze massa de ruimte om zich heen. De kromming van de ruimte wordt bij de zogenaamde *Schwarzschild straal*, gelijk aan

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}, \quad (9.2.21)$$

zo groot dat zelfs het licht niet meer aan de aantrekkingskracht van de puntmassa kan ontsnappen^a. Dit is dan ook de straal van een zwart gat met massa M . Bijvoorbeeld: nemen we voor M de zonsmassa $M_\odot \approx 1,98 \times 10^{30}$ kg, dan vinden we $R_S \approx 3$ km.

Volgens de quantummechanica hoort bij de massa M nog een karakteristieke lengteschaal, λ_M , die gelijk is aan:

$$\lambda_M = \frac{\hbar}{Mc}. \quad (9.2.22)$$

Men verwacht dat de invloed van de quantummechanica op de zwaartekracht belangrijk wordt als deze twee karakteristieke lengtes ongeveer even groot zijn:

$$\frac{2GM}{c^2} \approx \frac{\hbar}{Mc}. \quad (9.2.23)$$

Dit is het geval als de massa M ruwweg (op factoren $\sqrt{2}$ na) gelijk is aan de *Planck massa* m_{pl} :

$$m_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,3 \times 10^{-8} \text{ kg}. \quad (9.2.24)$$

De bijbehorende lengteschaal is de *Planck lengte* L_{pl} en de bijbehorende tijdschaal is de *Planck tijd* $t_{\text{pl}} = L_{\text{pl}}/c$:

$$L_{\text{pl}} = \frac{\hbar}{m_{\text{pl}}c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6 \times 10^{-35} \text{ m}, \quad t_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5,4 \times 10^{-44} \text{ s}. \quad (9.2.25)$$

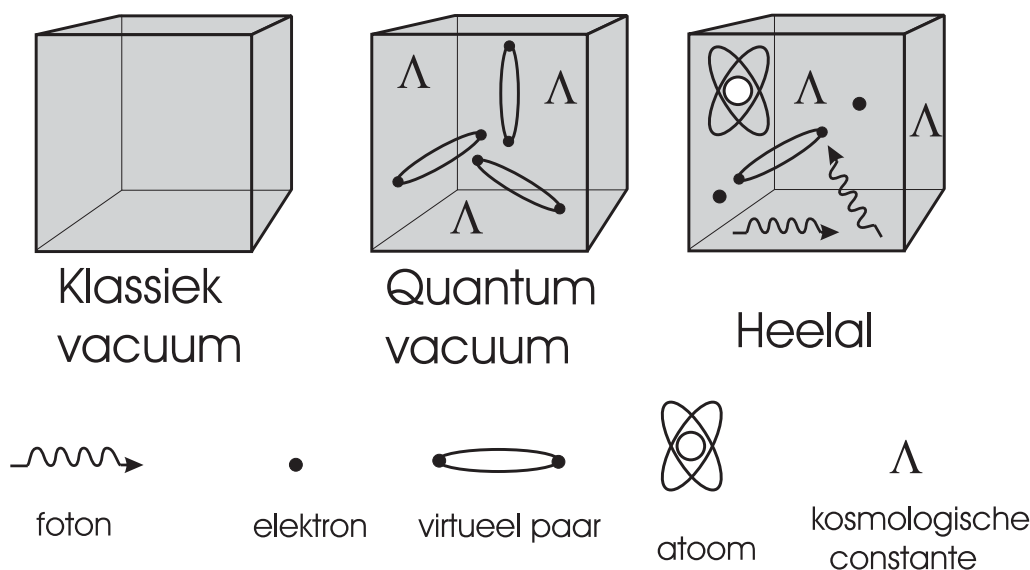
Klassieke zwaartekracht (d.w.z. Algemene Relativiteit) is niet langer een adequate beschrijving voor tijden korter dan de Planck tijd, en voor afstanden kleiner dan de Planck lengte.

^aDit is dezelfde straal als men vindt wanneer je de ontsnappingsnelheid op afstand r van een puntmassa M , $V_{\text{ont}} = \sqrt{2GM/r}$, gelijk stelt aan de lichtsnelheid c .

9.2.3 Het samenstellingsprobleem

Het **samenstellingsprobleem** voor donkere materie (zie Tabel 7) is al aan bod geweest in Hoofdstuk 9. De samenvatting is simpel: alhoewel de aanwijzingen voor het bestaan ervan duidelijk zijn weten wij niet wat de niet-baryonische donkere materie precies is.

Wellicht nog raadselachtiger is de **kosmologische constante** die ons heelal ook nu lijkt te kennen. De moderne interpretatie van deze grootheid, namelijk als het effect van een niet-verdwijnende massadichtheid ρ^{vac} van lege ruimte (d.w.z. $\Lambda = 8\pi G \rho^{\text{vac}}$), creëert zo zijn eigen probleem. Om dat te kunnen begrijpen moeten we een klein beetje in de quantummechanica duiken. Onderstaande figuur dient daarbij als illustratie.



Figuur 9.2: *Het klassieke vacuüm (links, lege ruimte), het quantum-vacuüm (midden) en het bijna-vacuüm van de interstellaire ruimte (rechts) waarin deeltjes, fotonen en atomen voorkomen met een zeer lage dichtheid. Het quantum-vacuüm van de moderne natuurkunde kan vacuümdichtheid (een kosmologische constante Λ) hebben, en is een arena vol met virtuele processen zoals spontane elektron-positron paarcreatie en -vernietiging.*

Het quantummechanisch vacuüm is, in tegenstelling tot het klassieke vacuüm, *niet* volstrekt leeg! In de eerste plaats laat de quantummechanica processen toe als de spontane creatie van een zeer kort levend paar bestaande uit een deeltje en het bijbehorende antideeltje. Een voorbeeld is de creatie van een elektron-positron paar. ‘Kort’ levend betekent in het geval van paarcreatie dat de levensduur voldoet aan

$$\Delta t < \frac{\hbar}{2mc^2} \quad (\sim 10^{-21} \text{ s voor een elektron-positron paar}), \quad (9.2.26)$$

met m de massa van het deeltje (gelijk aan de massa van het bijbehorende antideeltje). In dat geval zijn de individuele deeltjes van het paar *niet* waarneembaar als gevolg van het *onzekerheidsprincipe van Heisenberg*. Men spreekt dan van *virtuele deeltjes*. Ook al zijn de virtuele deeltjes niet afzonderlijk te zien, het effect van de alle virtuele deeltjes samen is wel degelijk meetbaar.

Dergelijke metingen zijn gedaan, en daarom weten we dat dit een echt fysisch effect is dat bekend staat als *vacuümfluctuaties*. Samenvattend: het quantum-vacuüm kent weliswaar geen waarneembare deeltjes, en is ‘leeg’ in die zin, maar bevat wel een zee van individueel onwaarneembare virtuele deeltjes.

De vacuümfluctuaties geven in principe ook een bijdrage aan de vacuümdichtheid. Het vervelende is echter dat de simpelste berekeningen van de grootte van het effect een antwoord voor de waarde van de kosmologische constante Λ geven dat veel te groot is als men één van de bekende deeltjes gebruikt.

De essentie van dergelijke berekeningen (en het probleem) kan worden begrepen met een redenatie die lijkt op onze schatting in Hoofdstuk 6.1 van de dichtheid van een thermisch gas van fotonen. Stel, virtuele deeltjes met een massa m leveren een dominante bijdrage aan de vacuümdichtheid. De bijbehorende quantummechanische lengteschaal is

$$\lambda_m = \hbar/mc . \quad (9.2.27)$$

Een massa-dichtheid heeft de dimensie [massa]/[lengte]³, en de enige grootte met die dimensie die we uit de fundamentele parameters \hbar , c en m kunnen vormen is

$$\rho_m = \frac{m}{\lambda_m^3} = \frac{m^4 c^3}{\hbar^3} . \quad (9.2.28)$$

De gemeten waarde van de vacuümdichtheid in ons heelal correspondeert met

$$\rho^{\text{vac}} \simeq 6.3 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 . \quad (9.2.29)$$

We stellen $\rho_m = \rho^{\text{vac}}$ en lossen we vervolgens relatie (9.2.28) op voor de massa m van het betrokken deeltje/antideeltje. Het resultaat van die berekening is:

$$m = \left(\frac{\hbar^3 \rho^{\text{vac}}}{c^3} \right)^{1/4} \simeq 10^{-38} \text{ kg} . \quad (9.2.30)$$

Deze massa is heel klein, ter vergelijking: de elektronmassa is $m_e \simeq 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$. Deeltjes met zo’n kleine massa zouden al lang gezien zijn bij experimenten met deeltjesversnellers. Dat geeft al aan dat er iets aan deze berekening niet klopt. Wij weten alleen nog niet hoe het dan wel moet.

Hoofdstuk 10

Inflatie: één oplossing voor twee problemen

Zo rond 1980 kwamen twee natuurkundigen, Andrei Linde (toen in Rusland) en Alan Guth (uit de VS) ieder met een model voor een korte periode van zeer snelle expansie in het vroege heelal: een zogenaamd *Inflatiemodel*. De belangrijkste motivatie voor deze inflatiemodellen was (en is) dat het de eerste twee problemen van het standaard Oerknalmodel oplost: het vlakheidsprobleem en het horizonprobleem.

10.1 De oplossing van het vlakheidsprobleem

We beginnen met het vlakheidsprobleem. De vergelijking

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{(dR/dt)^2}. \quad (10.1.1)$$

beschrijft de afwijking van vlakheid. Differentiëren we deze relatie naar de tijd dan volgt:

$$\frac{d}{dt} (|\Omega - 1|) = -2 \frac{|k|}{(dR/dt)^3} \frac{d^2R}{dt^2} = -2 |\Omega - 1| \frac{\ddot{R}}{\dot{R}}, \quad (10.1.2)$$

met $\dot{R} = dR/dt$ en $\ddot{R} = d^2R/dt^2$. Dit laat zien dat de afwijking van vlakheid afneemt in een expanderend heelal (met $\dot{R} > 0$) als de expansie versnelt: $\ddot{R} > 0$. Bij klassieke Friedmann modellen is juist het tegenovergestelde het geval, zij hebben $\ddot{R} < 0$. Vandaar het vlakheidsprobleem van die modellen. Maar een de-Sitter model heeft die eigenschap wel. Daar geldt:

$$R(t) = \text{constante} \times e^{H_\Lambda t}, \quad \frac{dR}{dt} = H_\Lambda R, \quad \frac{d^2R}{dt^2} = H_\Lambda^2 R \quad (10.1.3)$$

met $H_\Lambda = \sqrt{\Lambda/3} = \sqrt{8\pi G \rho^{\text{vac}}/3}$ min-of-meer constant. Als er iets bestaat dat het heelal gedurende een korte tijd van voorziet van een soort vacuümdichtheid zitten we goed.

Tijdens een inflatiefase gedraagt de schaalfactor en zijn afgeleide zich als (10.1.3), en neemt de afwijking van vlakheid af als

$$|\Omega - 1| \propto R^{-2} \propto e^{-2H_\Lambda t} . \quad (10.1.4)$$

De kromming van het heelal vermindert dus exponentieel snel!

Men kan dan de waarnemingen verklaren als men de *inflatiefactor*, gedefiniëerd als de verhouding van de schaalfactoren direct na, en aan het begin van de inflatieperiode

$$\mathcal{Z}_{\text{infl}} = \frac{R_{\text{eind}}}{R_{\text{begin}}} = e^{H_\Lambda(t_{\text{eind}} - t_{\text{begin}})} , \quad (10.1.5)$$

voldoende groot maakt. Er geldt immers:

$$|\Omega - 1|_{\text{eind}} = \frac{|\Omega - 1|_{\text{begin}}}{\mathcal{Z}_{\text{infl}}^2} . \quad (10.1.6)$$

In inflatie-theorie doen hele grote inflatiefactoren de ronde, getallen als $\mathcal{Z}_{\text{infl}} > 10^{60}$, zodat aan het eind van de inflatieperiode ieder spoor van het niet helemaal vlak zijn van het heelal is uitgewist. De enige eis om dit scenario te doen slagen is dus dat de inflatiefase lang genoeg duurt, dat wil zeggen met behulp van (10.1.5):

$$H_\Lambda(t_{\text{eind}} - t_{\text{begin}}) = \ln(\mathcal{Z}_{\text{infl}}) \gg 1 . \quad (10.1.7)$$

10.2 Oplossing van het horizonprobleem

Het inlassen van een inflatiefase in het vroege heelal lost ook het horizonprobleem op. Kort samengevat komt het hier op neer: als je er voor kunt zorgen dat een gebied ter grootte van de horizon *aan het begin van de inflatiefase* door inflatie zo groot wordt dat de rand ervan *zelfs nu* nog ver buiten onze horizon (met afmeting $D_{\text{hor}}(t_0)$) ligt, dan is ons heelal nu op de grootste schalen uniform. De reden is simpel: binnen de oorspronkelijke horizon, bij het begin van de inflatiefase, is alles al goed gemengd omdat de afstemming van eigenschappen *binnen* een horizon fysisch simpel mogelijk is.

Dit criterium kan simpel in een formule worden gevangen. Stel, de inflatie begint op tijdstip t_{begin} . Op dat moment is de typische horizonafstand ct_{begin} . Door inflatie met een factor $\mathcal{Z}_{\text{infl}}$ is dat gebied aan het eind van de inflatiefase opgerekt tot een afmeting $\mathcal{Z}_{\text{infl}} \times ct_{\text{begin}}$. Daarna gaat de expansie van het heelal rustig (niet meer zo snel) verder volgens een standaard Friedmann model. In die tijd groeit de schaalfactor van de waarde aan het eind van de inflatiefase (R_{eind}) tot de huidige schaalfactor R_0 . De totale expansiefactor sinds het eind van de inflatiefase is dus

$$\mathcal{Z}_{\text{na}} = \frac{R_0}{R_{\text{eind}}} = \frac{T_{\text{eind}}}{T_0} . \quad (10.2.1)$$

In de tweede stap is gebruikt dat de stralingstemperatuur in een uitdijend heelal zich gedraagt als $T = T_0 (R/R_0)^{-1}$, zie Hoofdstuk 3. Dat betekent dat bovenstaand criterium neerkomt op:

$$D_* \equiv \mathcal{Z}_{\text{na}} \times \mathcal{Z}_{\text{infl}} \times ct_{\text{begin}} = \left(\frac{T_{\text{eind}}}{T_0} \right) \times \mathcal{Z}_{\text{infl}} \times ct_{\text{begin}} \gg D_{\text{hor}}(t_0) \simeq ct_0 . \quad (10.2.2)$$

Het interessante is nu dat in de meeste inflatiemodellen de energiedichtheid $\rho^{\text{vac}} c^2$ grotendeels wordt omgezet in warmte, dat wil zeggen in een thermisch gas van allerlei relativistische deeltjes en fotonen. Het resultaat is, enigzins contra-intuïtief, dat de eindtemperatuur en de temperatuur bij het begin van de inflatiefase ongeveer gelijk zijn: $T_{\text{eind}} \simeq 0.3 T_{\text{begin}}$. Deze *herverhitting* of *Little Bang* is ook noodzakelijk. Vond deze niet plaats dan zou de kosmische afkoelingswet $T \propto R^{-1}$ tot gevolg hebben dat het heelal aan het eind van de inflatiefase een zeer lage temperatuur heeft, van de orde $T_{\text{eind}} \simeq T_{\text{begin}}/\mathcal{Z}_{\text{infl}} \ll T_{\text{begin}}$. Een direct gevolg zou zijn dat het heelal -na inflatie- ook vrijwel leeg is. Als je dat (foute) resultaat $T_{\text{eind}} = T_{\text{begin}}/\mathcal{Z}_{\text{infl}}$ zou invullen in de bovenstaande formule (10.2.2) is snel duidelijk dat de inflatie er dan eigenlijk niet meer toe doet: de inflatiefactor $\mathcal{Z}_{\text{infl}}$ valt uit de formule weg!

Met een inflatiemodel in de hand ken je T_{eind} , en valt direct uit te rekenen of aan criterium (10.2.2) is voldaan. Onderstaande tabel (Tabel 9) geeft voorbeelden van de typische getallen voor twee historisch belangrijke inflatiemodellen. In deze tabel is gebruikt dat $T_0 \simeq 2.7$ K en dat 1 jaar $\simeq 3 \times 10^7$ seconden telt.

Tabel 9: Typische getallen van bekende inflatie-modellen.

Model	t_{begin}	t_{eind}	T_{begin}	$\mathcal{Z}_{\text{infl}}$	\mathcal{Z}_{na}	D_*
Alan Guth's model:	10^{-34} s	10^{-32} s	10^{27} K	10^{32}	10^{26}	10^{16} lichtjaar
Andrei Linde's model:	10^{-43} s	10^{-40} s	10^{32} K	$10^{10^{10}}$	10^{31}	10^{10^9} lichtjaar

Het moge duidelijk zijn dat aan het criterium in beide gevallen ruimschoots is voldaan: de afstand D_* is veel groter dan de huidige horizonafstand van zo'n 14 miljard lichtjaar.

Een addertje onder het gras?

Een oplettende lezer zou nu kunnen protesteren, en zeggen: hoe kan de rand van de toenmalige horizon op dit moment buiten de huidige horizon liggen als niets sneller kan dan het licht? De horizon is toch precies de maximale afstand die kan worden afgelegd met de lichtsnelheid? Het antwoord op dit bezwaar heeft te maken met de zienswijze van de Algemene Relativiteitstheorie (ART). Deze zegt: *geen enkel signaal plant zich sneller voort door de ruimte dan met de lichtsnelheid!* Echter, in de ART is de ruimte dynamisch: zij kan worden opgerekt of, als je in termen van afstanden denkt, *er kan afstand worden bijgemaakt!*

In het geval van inflatie betekent dit simpelweg het volgende: tussen twee willekeurige punten wordt, als zij ver genoeg uit elkaar staan, per seconde sneller ruimte (afstand) bijgemaakt dan een foton (op weg van één punt naar het andere) per seconde kan overbruggen. Het criterium voor deze situatie is simpel af te leiden: stel de twee punten zijn bij het moment dat de inflatiefase begint gescheiden door een afstand D . Een foton vertrekt op hetzelfde moment van een van de punten richting het andere. Tijdens de inflatiefase, met Hubble constante H_Λ , neemt de fysische afstand tussen de twee punten toe volgens Hubble's wet:

$$\frac{dD}{dt} = H_\Lambda D. \quad (10.2.3)$$

Toen deze wet werd uitgelegd is al betoogd dat dit binnen het raamwerk van de ART geen *echte* snelheid is door de ruimte, maar een maat voor de afstandstoename ten gevolge van het oprekken van de ruimte. Als deze 'snelheid' groter is dan de lichtsnelheid c bereikt het foton, dat ook de bijgemaakte afstand moet overbruggen, het tweede punt nooit. Dat is het geval als

$$H_\Lambda D > c \iff D > \frac{c}{H_\Lambda}. \quad (10.2.4)$$

Dit criterium blijft ook later in de inflatiefase geldig.

Dat betekent dat de rand van de oorspronkelijke horizon (mits inflatie lang genoeg duurt) uiteindelijk altijd verder weg staat dan c/H_Λ . Zij is dan zelfs voor fotonen niet meer te bereiken.

In feite neemt de afstand c/H_Λ tijdens de inflatie de rol van de horizon over: het is de afstand waarbinnen communicatie met behulp van fotonen mogelijk is. Maar in tegenstelling tot de klassieke horizon, die schaaft als $D_{\text{hor}} \simeq ct$ en altijd groter wordt als het heelal ouder wordt, is dit in een de Sitter heelal een *vaste* afstand.

Een andere manier om dit in te zien gebruikt de relatie

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{R(t)} . \quad (10.2.5)$$

voor de afgelegde meebewegende afstand $r(t)$ van een lichtsignaal. De fysische afstand is als vanouds $D(t) = R(t)r(t)$. Stel, het foton begint zijn reis op tijdstip t_0 . We kiezen $R_0 = 1$ zodat de schaaftactor geschreven kan worden als

$$R(t) = \exp(H_\Lambda(t - t_0)) . \quad (10.2.6)$$

Dan vinden we:

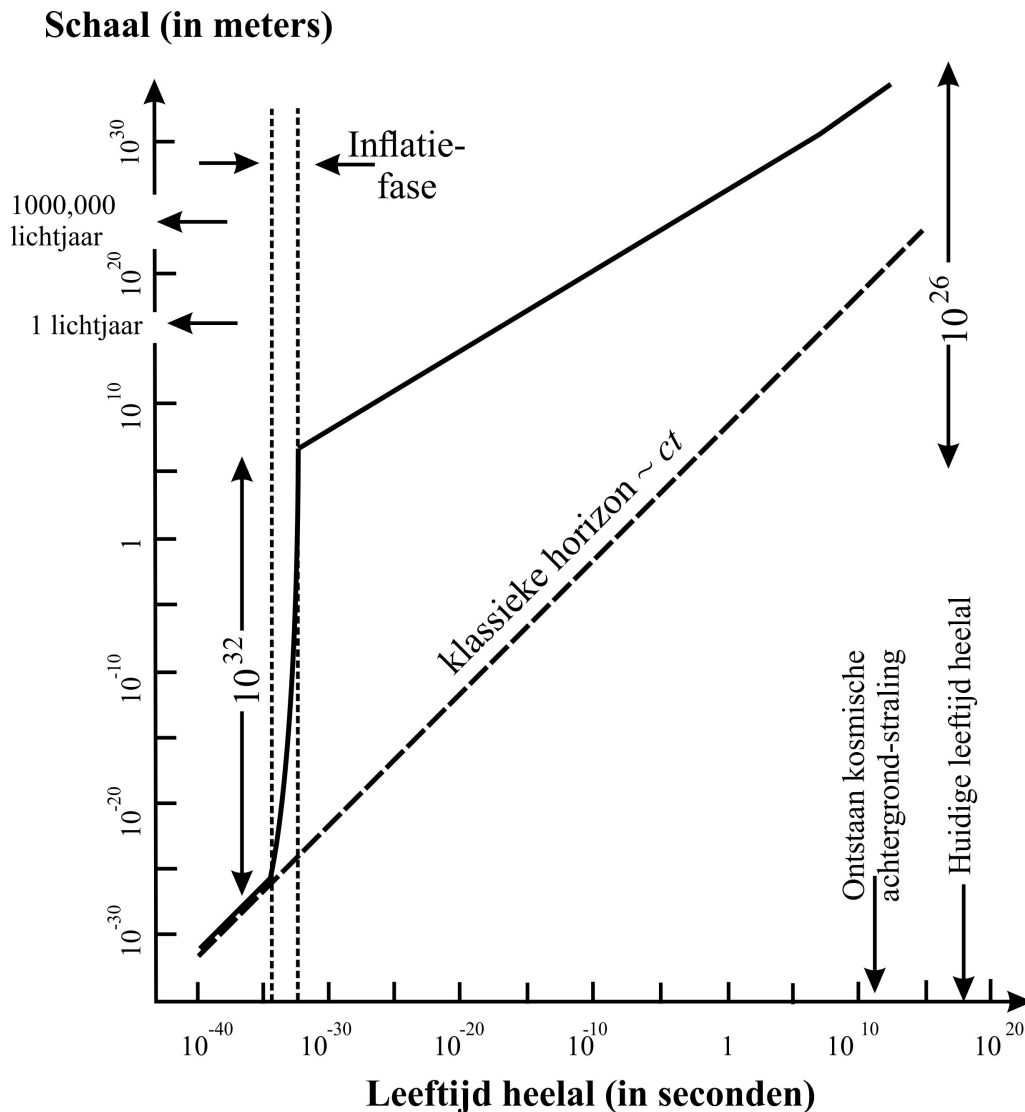
$$r(t) = \int_{t_0}^t \frac{c dt}{\exp(H_\Lambda(t - t_0))} = \frac{c}{H_\Lambda} [1 - \exp(H_\Lambda(t_0 - t))] \quad (10.2.7)$$

Voor $t \rightarrow \infty$ nadert $r(t)$ asymptotisch de *constante* waarde

$$r(t \rightarrow \infty) \rightarrow r_{\text{max}} = \frac{c}{H_\Lambda} . \quad (10.2.8)$$

Objecten die passief meedoen met de Hubble-expansie van het heelal hebben een constante meebewegende afstand r . Op het moment dat het foton zijn reis begint, op tijdstip $t = t_0$ met $R(t_0) = R_0 = 1$, correspondeert die maximaal haalbare meebewegende straal r_{max} met een *fysische* afstand D_0 tot het vertrekpunt gelijk aan $D = r_{\text{max}} = c/H_\Lambda$. Objecten die bij vertrek verder weg staan worden door het foton nooit bereikt. Omdat (binnen de inflatiefase) het vertrektijdstip t_0 willekeurig kan worden gekozen geldt op ieder tijdstip dat de invloedssfeer van een lichtsignaal beperkt is tot een constante afstand c/H_Λ , gemeten bij vertrek. Als inflatie lang genoeg duurt komen ook aanvankelijk nabij gelegen gebieden vanzelf terecht op een fysische afstand groter dan c/H_Λ , en verdwijnen zij als het ware achter de invloedshorizon.

Onderstaande figuur illustreert hoe een inflatie-fase leidt tot de oplossing van het horizon-probleem.



Figuur 10.1: Een illustratie van de oplossing van het horizonprobleem door het inlassen van een inflatie-fase. In een klassiek Friedmann model is de horizonafstand ongeveer gelijk aan $D_{\text{hor}} \sim ct$, de streepjeslijn in deze dubbel-logaritmische grafiek. In zo'n model is -op ieder moment- alleen communicatie (en afstemming van fysische omstandigheden) mogelijk voor afstanden onder deze lijn.

Lost men een inflatiefase in (de doorgetrokken curve), in de figuur tussen $t \sim 10^{-34}$ en $t \sim 10^{-32}$ seconde met een inflatiefactor $Z_{\text{infl}} \approx 10^{32}$, dan wordt een gebied ter grootte van de horizon aan het begin van de inflatie-fase (met een afmeting $\sim 10^{-26}$ m) opgeblazen tot een afmetingen van ~ 1000 km. Daarna wordt dit gebied door de algehele expansie van het heelal nog met een factor $\sim 10^{26}$ verder opgerekt, ongeveer tot een afmeting van $\sim 10^{32}$ meter (= 10^{16} lichtjaar). Dat is véél groter dan de formele horizon ($\sim 10^{10}$ lichtjaar) op dit moment. Vóór inflatie begon was dit gebied al min of meer uniform. Dat is nu, lang na inflatie, nog steeds zo.

10.3 Gevanceerd onderwerp: wat veroorzaakt inflatie?

Voor een inflatie-fase heb je iets nodig dat zich (gedurende een korte, maar niet *te* korte tijd) gedraagt als een kosmologische constante. Er zijn veel modellen voor inflatie, ieder met zijn eigen preciese mechanisme. Het zou te ver voeren om de details daarvan te bespreken. Daarom beperken we ons tot de hoofdzaak.

Vrijwel alle modellen introduceren een extra ingrediënt in het heelal: een *scalair veld*. Velden ken je al uit de gewone natuurkunde. Zo is er bijvoorbeeld het elektrisch veld, of het zwaartekrachtsveld volgens Newton. Dat zijn allebei *vectorvelden*: aan ieder punt van de ruimte kennen ze een vector (pijl met richting en grootte) toe. De richting van de vector geeft dan de richting van het elektrisch veld, of van de zwaartekrachtsversnelling, en de lengte van de vector geeft de grootte daarvan.

Een scalair veld is eigenlijk nog eenvoudiger: het kent aan ieder punt van de ruimte een getal (*scalar*) toe. Het eenvoudigste alledaags voorbeeld van zo'n scalair veld is een *hoogtekaart* in de geografie: deze geeft op ieder punt op de kaart, als functie van geografische lengte en breedte, de hoogte van een punt boven zeeniveau.

In de quantumveldentheorie waren traditioneel alle velden vectorvelden, of de meer ingewikkelde spinor-velden. Echter, al sinds ~ 1964 waren er voorstellen om daarnaast een speciaal scalair veld te introduceren, het *Higgs veld*, genoemd naar de Schotse natuurkundige Peter Higgs. De rol van dat veld was met name om het mogelijk te maken een enkele theorie te bouwen die twee van de vier fundamentele wisselwerkingen, de *elektrische kracht* en de *zwakke kernkracht*, in één theorie te verenigen. Bovendien geeft dit veld massa aan fundamentele deeltjes. Het bij dit Higgs veld horende fundamentele deeltje¹, het *Higgs boson*, is in 2012 op het CERN experimenteel aangetoond. De natuur gebruikt inderdaad scalaire velden!

Voor de kosmologie is een andere eigenschap van scalaire velden van belang: een uniform scalair veld (uniform = overal hetzelfde) is in de praktijk niet te onderscheiden van vacuüm, maar kan wel vacuüm-energie leveren, in feite de energie van het scalaire veld. Een en ander heeft te maken met drie wiskundige eigenschappen van lege ruimte, zie het kader op de volgende pagina. Een constant scalair veld kent geen deeltjes, want in de quantummechanica zijn daar trillingen van het veld voor nodig. Een scalair veld definiëert ook geen voorkeursrichting, in tegenstelling tot een vectorveld. Een uniform veld heeft ook geen voorkeurspositie. Daarom noemt men de situatie met een constant, energie-leverend scalair veld wel eens een *vals vacuüm*.

Het grote verschil met de klassieke kosmologische constante zoals Einstein die in gedachten has is het volgende: in een expanderend heelal heeft ieder scalair veld zijn eigen dynamica: het verandert omdat het heelal uitzet, en de temperatuur in het heelal voortdurend daalt.

Dat betekent dat zo'n vals vacuüm toestand van voorbijgaande aard is: het bestaat in het algemeen betrekkelijk kort, waarna de energie die in het constante scalaire veld is opgeslagen wordt omgezet in 'warmte', dat wil zeggen: in energetische straling en deeltjes.

¹In de quantummechanica heeft ieder veld één of meerdere geassocieerde deeltjes, met eigenschappen die samenhangen met de wiskundige eigenschappen van het veld.

De kunst is om een natuurkundig redelijk scalair veld te vinden dat zijn toestand van vals vacuüm voldoende lang vast houdt. Zolang dat het geval is zorgt de bijbehorende kosmologische constante voor een de-Sitter fase, hopelijk met een voldoende grote inflatiefactor. Het al eerder genoemde Higgs-veld heeft de juiste eigenschappen daarvoor helaas niet, het moet dus iets ‘nieuws’ zijn. Er zijn momenteel vele mogelijkheden onderzocht, maar er is experimenteel nog geen manier gevonden om de juiste mogelijkheid te selecteren.

Toch zou dat in de nabije toekomst wel kunnen. Een inflatie-fase in het heelal laat een ‘vingerafdruk’ na die in principe is waar te nemen. Die vingerafdruk is een kenmerkend patroon in de polarisatie van de kosmische achtergrondstraling. Dat patroon ontstaat omdat het einde van de inflatie-fase, de *Little Bang* waarbij het heelal opnieuw wordt gevuld met deeltjes en straling, als bij-effect leidt tot de opwekking van zwaartekrachtsgolven. Zwaartekrachtsgolven zijn rimpelingen in de ruimte zelf, die mogelijk zijn in de Algemene Relativiteitstheorie. Dit leidt tot een *kosmische zwaartekrachtsgolf-achtergrond* die niet *direct* is waar te nemen, maar wel indirect door het effect dat zij heeft op de kosmische achtergrondstraling.

Begin 2014 rapporteerde het BICEP experiment, een infra-rood telescoop op de Zuidpool die speciaal is ontworpen voor het waarnemen van dit effect, dat zij dat kenmerkende patroon had waargenomen. Sindsdien zijn er echter twijfels gerezen over dit resultaat. Mogelijk zijn de BICEP metingen het gevolg van verstrooiing van infra-roodstraling in ons eigen Melkwegstelsel door het daarin rijkelijk aanwezige stof. Een gecombineerde analyse van de BICEP gegevens en de metingen met het PLANCK satelliet-experiment liet in 2015 zien dat de stof-verklaring voor het signaal het meest waarschijnlijk is.

De wiskundige eigenschappen van het vacuüm

1. Lege ruimte ziet er overal hetzelfde uit: het vacuüm is *translatie-invariant*. Een waarnemer kan zich over een willekeurige afstand verplaatsen zonder dat hij iets ziet veranderen.
2. Lege ruimte ziet er in alle richtingen hetzelfde uit: het vacuüm is *rotatie-invariant*. Als de waarnemer een willekeurige hoek rond een willekeurig gekozen as draait ziet hij na de draaiing dezelfde situatie.
3. Lege ruimte ziet er voor alle eenparig bewegende waarnemers, ongeacht hun snelheid, gelijk uit: het vacuüm kent geen bakens om de beweging mee vast te stellen.

Hoofdstuk 11

Het vroege heelal

11.1 Expansiewet, temperatuur en dichtheid

Het vroege heelal, hier voor het gemak gedefinieerd als het heelal jonger dan 100,000 jaar, is de eerste seconden van haar bestaan een hete soep van straling en elementaire deeltjes. De hoge dichtheid en de hoge temperatuur zorgen er voor dat deeltjes vaak met elkaar botsen. Daarbij vinden allerlei processen (interacties) tussen deeltjes plaats. Sommige van die interacties kunnen we tegenwoordig ook waarnemen in experimenten met deeltjesversnellers.

In het voorgaande hebben we gezien dat ons heelal vrijwel (of wellicht geheel) vlak is, dat wil zeggen: $|\Omega_0 - 1| \ll 1$. Een dergelijk heelal was in het verleden nog vlakker dan nu. Dat betekent dat wij voor berekeningen van processen in het vroege heelal de relaties kunnen gebruiken die gelden in een vlak heelal.

Als het heelal jonger is dan 50,000 jaar levert straling (fotonen, neutrino's en andere relativistische deeltjes) de dominante bijdrage aan de massadichtheid. De bijdrage van koude materie (deeltjes met een grote rustmassa) is dan klein. De kosmologische constante $\Lambda = 8\pi G \rho^{\text{vac}}$ die nu domineert is in die periode volstrekt onbelangrijk, tenzij zijn waarde sterk oploopt naar het verleden toe. Daarvoor zijn tot nu toe geen aanwijzingen.

Deze twee overwegingen leiden er toe dat we zonder probleem de Friedmann oplossing voor een vlak, door straling gedomineerd heelal kunnen gebruiken, Daarin geldt zoals eerder afgeleid:

$$R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}, \quad T(t) = T_0 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^{-1} = T_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-1/2}. \quad (11.1.1)$$

In Hoofdstuk 6 hebben wij gezien dat alle relativistische deeltjes in thermisch evenwicht per deeltjessoort een dichtheid hebben die schaalt als

$$n(T) \approx \left(\frac{k_b T}{hc} \right)^3. \quad (11.1.2)$$

Wij zullen in wat volgt een aanpak volgen die ons in staat stelt om praktische berekeningen te doen. Als we alle temperaturen meten in eenheden van 10^{10} K geldt tijdens de door straling gedomineerde fase van het heelal het volgende verband tussen de temperatuur en de leeftijd t van het heelal:

$$\frac{T}{10^{10} \text{ K}} \simeq \left(\frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2}. \quad (11.1.3)$$

De dichtheid totale dichtheid in thermisch evenwicht is bij een temperatuur T ruwweg gelijk is aan

$$n(T) \simeq (\text{aantal deeltjessoorten}) \times 10^{37} \left(\frac{T}{10^{10} \text{ K}} \right)^3 \text{ m}^{-3}. \quad (11.1.4)$$

Omdat $T(t) \propto t^{-1/2}$ betekent dit dat de deeltjesdichtheid met de tijd t afneemt als $n \propto t^{-3/2}$.

11.2 Koppeling en ont koppeling

De grote deeltjesdichtheid in het vroege heelal betekent dat er veel interacties zijn tussen deeltjes: in zekere zin is het vroege heelal een expanderend en steeds verder afkoelend reactorvat. Deze frequente interacties zijn er in feite voor verantwoordelijk dat de situatie van thermisch evenwicht (TE) wordt gehandhaafd. Deeltjes die frequent met elkaar wisselwerken zijn aan elkaar *gekoppeld*.

Echter, omdat de deeltjesdichtheid steeds verder daalt worden de interacties steeds minder frequent, en kan TE op den duur niet voor alle deeltjes worden gehandhaafd. Als de deeltjes niet meer noemenswaardig wisselwerken met de rest van de materie en straling in het heelal zijn ze *ontkoppeld*.

Het criterium voor koppeling/ontkoppeling is het makkelijkst te begrijpen als we het concept van de *interactielengte* ℓ_{int} invoeren. Dit is de typische afstand die een deeltje aflegt tussen twee opeenvolgende interacties met een ander deeltje. Voor relativistische deeltjes, die met de lichtsnelheid c bewegen, is dan de tijd tussen opeenvolgende interacties gelijk aan

$$t_{\text{int}} = \frac{\ell_{\text{int}}}{c}, \quad (11.2.1)$$

de tijd die nodig is een afstand ℓ_{int} te reizen. Deeltjes zijn sterk gekoppeld aan andere deeltjes in het heelal mits de interactietijd t_{int} veel korter is dan de leeftijd van het heelal, de typische tijdschaal waarop dichtheid en temperatuur dalen: $t_{\text{int}} \ll t$. Deze voorwaarde is equivalent met

$$\ell_{\text{int}} = ct_{\text{int}} \ll D_{\text{hor}} \simeq ct, \quad (11.2.2)$$

de interactielengte moet veel kleiner zijn dan de horizonschaal. In andere woorden: het heelal moet *ondoorzichtig* zijn voor de interactie.

Bij de meeste interacties neemt ℓ_{int} sterk toe met afnemende temperatuur, sterker dan de horizonafstand toeneemt. Er komt dan onvermijdelijk een moment waarbij aan de voorwaarde (11.2.2) niet langer is voldaan: het moment van *ontkoppeling*. Daarna geldt $\ell_{\text{int}} \gg D_{\text{hor}}$ en vindt de interactie niet of nauwelijks meer plaats: het heelal is doorzichtig geworden voor deze interactie.

Het voorgaande geeft een duidelijk recept voor het bepalen van het moment van ont-koppeling t_{ok} : op dat moment geldt

$$\ell_{\text{int}}(t_{\text{ok}}) \simeq ct_{\text{ok}} . \quad (11.2.3)$$

Wanneer men de belangrijkste interacties die een deeltje ondergaat kent valt dit moment uit te rekenen.

11.3 Interactielengte en de werkzame doorsnede

Stel, de dominante interactie van de deeltjessoort waarvan we het ont-koppelingsmoment willen bepalen is een botsing met een andere deeltjessoort met dichtheid n_* . De sterkte van de interactie wordt altijd weergegeven met behulp van de *werkzame doorsnede*, een denkbeeldig oppervlak dat je moet treffen wil de interactie ('botsing') plaatsvinden. Bijvoorbeeld: vervangt men een elementair deeltje door een knikkertje met straal r_* dan is dat denkbeeldige botsingsoppervlak gelijk aan¹ $\sigma = \pi r_*^2$. In de quantummechanica zijn deeltjes echter puntdeeltjes, zij hebben geen afmeting en geen hard oppervlak. Daar is de werkzame doorsnede σ voor een bepaalde interactie een intrinsieke eigenschap van het deeltje. De grootte van de werkzame doorsnede hangt sterk af van het soort interactie waarnaar men kijkt. De quantummechanica doet een voorspelling voor de werkzame doorsnede van iedere interactie, die vervolgens met experimenten in deeltjesversnellers, waar deeltjes met grote energie op elkaar botsen, kan worden gecontroleerd.

De werkzame doorsnede σ heeft als oppervlak de dimensie [lengte]², en de deeltjesdichtheid n_* heeft de dimensie [lengte]⁻³. Het ligt voor de hand dat de interactielengte ℓ_{int} afneemt als de dichtheid n_* van de deeltjes die als doel fungeren groter wordt, of als de werkzame doorsnede σ voor de interactie groter wordt, of allebei. Dat, samen met het feit dat ℓ_{int} een lengte is, suggereert het volgende verband:

$$\ell_{\text{int}} = \frac{1}{n_* \sigma} \text{ [m]} .$$

(11.3.1)

In de praktijk wordt σ zo gedefiniëerd dat bovenstaande relatie *exact* is.

¹Het is *niet* het oppervlak van het knikkertje ($4\pi r_*^2$) omdat je het geprojecteerde oppervlak van het schijfje (met staal r_* en oppervlak πr_*^2) moet nemen dat je ziet als je tegen het knikkertje aankijkt.

11.3.1 Een voorbeeld: kosmische neutrino's

Het standaardmodel van de deeltjesfysica kent drie neutrinosoorten: het electron-neutrino ν_e , het muon-neutrino ν_μ en het tau-neutrino ν_τ . In dat standaardmodel zijn alle drie neutrino's massa-loos (net als fotonen), maar we weten inmiddels dat dit niet correct is. Experimenten geven aan dat neutrino's een kleine massa moeten hebben.

Neutrino's worden vaak spookdeeltjes genoemd omdat zij zo zwak wisselwerken met andere materie. Dat blijkt uit het volgende: omdat neutrino's geen elektrische lading hebben heeft elektromagnetisme geen vat op ze. Ook de sterke kernkracht wordt door neutrino's niet gevoeld. Alleen de zwakke kernkracht is voor neutrino's van belang.

In het vroege heelal is de belangrijkste wisselwerking voor neutrino's de verstrooiing van neutrino's door elektronen en hun anti-deeltjes: de positronen. In de fase waarover wij spreken zijn de elektronen/positronen nog (net) relativistisch, sterk gekoppeld en in thermisch evenwicht. Hun dichtheid is dan ongeveer gelijk aan (11.1.4). De werkzame doorsnede voor de verstrooiing is gelijk aan:

$$\sigma_{\nu e} \simeq 10^{-46} \left(\frac{\mathcal{E}_f}{1 \text{ MeV}} \right)^2 \text{ m}^2 . \quad (11.3.2)$$

Hier is \mathcal{E}_f de neutrino-energie, en $1 \text{ MeV} \simeq 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$ is een energiemaat uit de deeltjesfysica. Zolang de neutrino's nog in thermisch evenwicht zijn is hun typische energie gelijk aan

$$\mathcal{E}_\nu \simeq k_b T = 0.87 \left(\frac{T}{10^{10} \text{ K}} \right) \text{ MeV} , \quad (11.3.3)$$

zodat we kunnen schrijven als een functie van de heersende temperatuur:

$$\sigma_{\nu e} \simeq 0.75 \times 10^{-46} \left(\frac{T}{10^{10} \text{ K}} \right)^2 \text{ m}^2 . \quad (11.3.4)$$

De interactielengte (verstrooiingslengte) wordt dan met behulp van (11.1.4)

$$\ell_{\text{int}}^\nu = \frac{1}{n(T) \sigma_{\nu e}} \simeq 10^9 \left(\frac{T}{10^{10} \text{ K}} \right)^{-5} \text{ m} . \quad (11.3.5)$$

Gebruiken we nu de afkoelingswet (11.1.3) voor de temperatuur in het heelal in de stralingsfase dan volgt:

$$\ell_{\text{int}}^\nu \simeq 10^9 \left(\frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{5/2} \text{ m} . \quad (11.3.6)$$

Het is duidelijk dat de interactielengte sneller toeneemt met de tijd (als $t^{5/2}$) dan de horizonafstand $D_{\text{hor}} \simeq ct$.

Het ont koppelingstijdstip t_ν voor neutrino's volgt uit voorwaarde (11.2.3):

$$10^9 \left(\frac{t_\nu}{1 \text{ s}} \right)^{5/2} = ct_\nu = 3 \times 10^8 \left(\frac{t_\nu}{1 \text{ s}} \right). \quad (11.3.7)$$

Hieruit volgt

$$t_\nu = 0.45 \text{ s}. \quad (11.3.8)$$

De neutrino's ont koppelen als het heelal nog net geen seconde oud is! De temperatuur op dat moment volgt uit (11.1.3), en is ongeveer $1.5 \times 10^{10} \text{ }^\circ\text{K}$.

11.4 En na de ont koppeling? Bevriezing!

Wij blijven even bij de neutrino's, omdat zij een goed voorbeeld zijn. Wat gebeurt er na de ont koppeling? Neutrino's gaan dan hun eigen weg, niet langer gehinderd door elektronen of wat dan ook. Alleen, net zoals fotonen, ondergaan zij roodverschuiving. Dat wil zeggen hun energie afneemt:

$$\mathcal{E}_\nu(t) \propto R^{-1}(t). \quad (11.4.1)$$

Zolang de neutrino-massa kan worden verwaarloosd is dit geldig. Bovendien voldoen ze aan de verdunningswet (3.1.3):

$$n_\nu(t) \propto R^{-3}(t). \quad (11.4.2)$$

Maar ook voor fotonen geldt $n \propto T^3 \propto R^{-3}$. Dat betekent dat voor $t > t_\nu$ de verhouding tussen de neutrino-dichtheid en de fotondichtheid *constant* blijft. Die constante waarde is gelijk is aan de waarde die deze verhouding had op het moment van ont koppeling:

$$\text{voor } t \geq t_\nu: \frac{n_\nu(t)}{n_{\text{foton}}(t)} = \text{constant} = \frac{n_\nu(t_\nu)}{n_{\text{foton}}(t_\nu)} \simeq 1. \quad (11.4.3)$$

De neutrino-foton dichtheidsverhouding verhouding is (in het taalgebruik van kosmologen) **bevroren**.

Omdat neutrino's ont koppelen bij een hoge temperatuur, en de neutrino-massa in ieder geval veel kleiner is dan 1 MeV, de typische thermische energie op het moment van ont koppeling, waren zij op dat moment ruwweg even talrijk als fotonen, en is de ingevroren verhouding van neutrino-dichtheid en fotondichtheid bij ont koppeling ongeveer gelijk aan één. Het bevroren van die verhouding betekent dat dit ook nu nog geldt: er zijn daarom in het heelal ongeveer 400 miljoen neutrino's (en 400 miljoen fotonen van de Kosmische Achtergrondstraling) per kubieke meter in het hele heelal.

11.4.1 Het algemene geval

Vrijwel alle principes die we hier voor neutrino's hebben besproken gelden ook voor andere fundamentele deeltjes in het vroege heelal. Als de dichtheid en temperatuur voldoende hoog is zijn alle deeltjes sterk gekoppeld. Zolang deeltjes relativistisch blijven is hun dichtheid vergelijkbaar met de foton-dichtheid. Als die deeltjes vervolgens ontkoppelen terwijl ze nog relativistisch zijn, d.w.z. bij een temperatuur T_{ok} die zo hoog is dat $k_{\text{b}}T_{\text{ok}} \gg mc^2$ met m de deeltjesmassa, dan waren deze deeltjes ook bij de ont koppeling ongeveer even talrijk als fotonen. Door de bevroering van de dichtheidsverhouding n/n_{foton} is dat ook in het huidige heelal nog het geval! Veruit de meeste fotonen zitten in de kosmische achtergrondstraling. Deze heeft een foton-dichtheid

$$n_{\text{foton}}(t_0) \simeq 4.2 \times 10^8 \text{ fotonen per m}^3. \quad (11.4.4)$$

De hierboven besproken neutrinos zijn een voorbeeld van deze klasse deeltjes.

Deeltjes die een zeer sterke wisselwerking met andere materie vertonen blijven, zelfs als zij niet langer relativistisch zijn, nog gekoppeld aan de andere materie. In dat geval geldt bij ont koppeling $k_{\text{b}}T_{\text{ok}} \ll mc^2$: de thermische bewegingsenergie is veel kleiner dan de rustenergie.

Bij ont koppeling is de dichtheid van deze massieve deeltjes ruwweg gelijk aan

$$n(t_{\text{ok}}) \simeq \left(\frac{k_{\text{b}}T_{\text{ok}}}{hc} \right)^3 \underbrace{\left(\frac{mc^2}{k_{\text{b}}T_{\text{ok}}} \right)^{3/2} e^{-mc^2/k_{\text{b}}T_{\text{ok}}}}_{\text{Boltzmann factor} \ll 1}. \quad (11.4.5)$$

Hun dichtheid is dus veel kleiner dan die van fotonen. Dit is het gevolg van de statistische fysica die leidt tot de zogenaamde *Boltzmann factor* $\ll 1$.

Ook nu, miljarden jaren later, is hun dichtheid nog steeds veel kleiner dan de foton-dichtheid omdat de dichtheidsverhouding bij ont koppeling is bevroren. De quarks zijn de bouwstenen van het proton en neutron, en zij vallen in deze categorie. Om die reden zijn er in het huidig heelal 1 miljard fotonen voor ieder proton. In ieder proton zitten drie quarks.

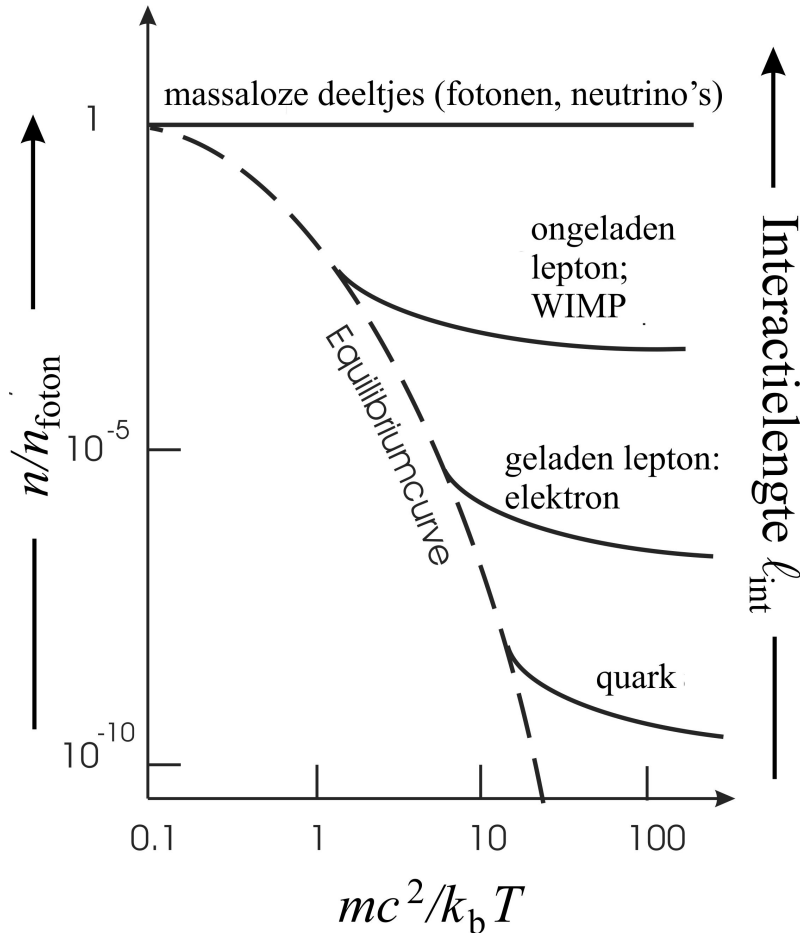
Samenvattend: na de ont koppeling is de verhouding van de deeltjesdichtheid en de foton-dichtheid constant: zij houdt de waarde vast die deze verhouding had bij de ont koppeling. Die waarde wordt bepaald door de grootte $mc^2/k_{\text{b}}T_{\text{ok}}$, de verhouding van rustenergie en thermische energie bij ont koppeling.

Ruwweg geldt:

$$\frac{n}{n_{\text{foton}}} = \begin{cases} \approx 1 & \text{als } mc^2 \ll k_b T_{\text{ok}} , \\ \approx \left(\frac{mc^2}{k_b T_{\text{ok}}} \right)^{3/2} e^{-(mc^2/k_b T_{\text{ok}})} \ll 1 & \text{als } mc^2 \gg k_b T_{\text{ok}} . \end{cases} \quad (11.4.6)$$

Figuur 11.1 illustreert dit.

Voor de volledigheid: er zijn veel deeltjes die niet stabiel zijn, en spontaan vervallen in andere deeltjes. Voor dergelijke deeltjes gelden bovenstaande overwegingen niet: als zij niet meer wisselwerken met de rest van het heelal, en niet meer worden bijgemaakt in botsingen tussen fotonen of andere deeltjes, vervallen de deeltjes, en verdwijnen zo. Eventuele *stabiele* vervalsproducten zijn dan in principe ook nu nog aanwezig.



Figuur 11.1: De verhouding van de deeltjesdichtheid en de fotondichtheid als functie van de verhouding $mc^2/k_b T$ van de rustenergie en thermische energie. Omdat de temperatuur afneemt in een expanderend heelal verandert deze grootte van klein naar groot.

Massalozе deeltjes zijn dan altijd even talrijk als fotonen, ongeacht de temperatuur.

Zwak wisselwerkende, lichte en ongeladen leptonen (deeltjes die de sterke kerkracht niet voelen) zijn iets minder talrijk. Ook ongeladen WIMPS, het mogelijke deeltje dat de Donkere Materie vormt, moeten een vergelijkbare dichtheid hebben.

De zwaardere geladen leptonen (zoals het elektron) blijven langer gekoppeld door de elektromagnetische wisselwerking die zij vertonen. Zij zijn nog minder talrijk. De nog zwaardere quarks, de bouwstenen van de zware deeltjes zoals proton en neutron, zijn het minst talrijk: zij voelen de als enigen de sterke kernkracht. De gestippelde equilibriumcurve is de hypothetische curve voor de dichtheidverhouding n/n_{foton} van een deeltje dat altijd gekoppeld blijft. Als de grafiek voor verschillende soorten deeltjes afwijkt van deze curve vindt de ontkoppeling plaats.

11.5 De belangrijkste fasen in het vroege heelal

In het onderstaande worden kort de belangrijkste gebeurtenissen in het vroege heelal besproken. De figuur op de volgende pagina geeft deze fasen schematisch weer.

Het quark-gluon plasma tijdperk: ($10^{-32} \text{ s} < t < 10^{-5} \text{ s}$, $10^{27} \text{ K} > T > 10^{13} \text{ K}$)

In deze vroegste fase bestaat is het heelal voor alle fundamentele deeltjes ondoorzichtig. De lijst van de bekende deeltjes staat in het kader op de volgende pagina. Het meest bijzondere van deze fase is dat het de enige fase in het heelal is waar de quarks, bouwstenen van zware deeltjes, de zogenaamde *hadronen*, zoals proton en neutron, en de boodschapperdeeltjes van de sterke kernkracht, de *gluonen*, vrij rondvliegen. De sterke kernkracht heeft de vreemde eigenschap dat zij sterker wordt naarmate de energie van de wisselwerkende deeltjes afneemt. Voor de andere fundamentele krachten is het omgekeerde het geval: de interactiesterkte neemt toe met toenemende energie.

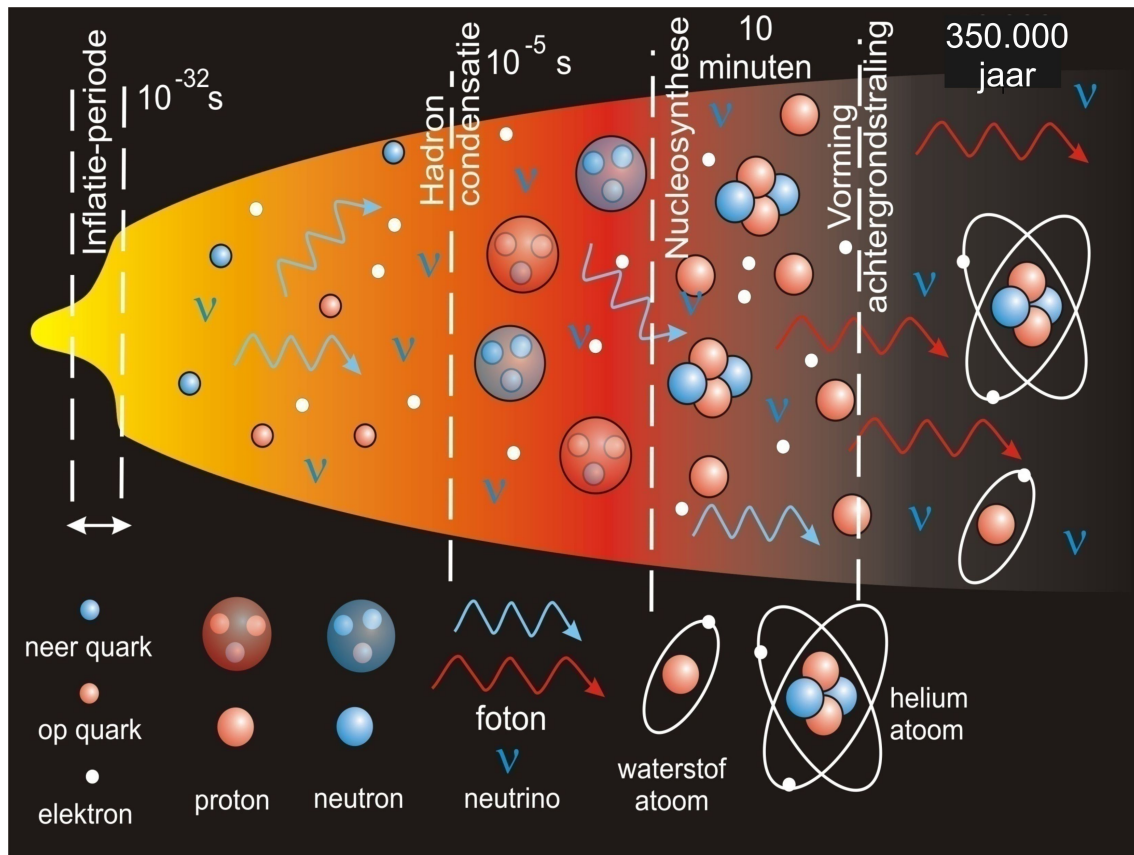
Aan het eind van het quark-gluon plasma tijdperk wordt de sterke kernkracht zo sterk dat de quarks condenseren, en zo protonen, neutronen en andere hadronen vormen. De meeste hadronen zijn echter niet stabiel, en vervallen snel.

Het (hadron-) plasma tijdperk: ($10^{-5} \text{ s} < t < 3000 \text{ jaar}$, $10^{13} \text{ K} > T > 4000 \text{ K}$)

Na het condenseren van de quarks en gluonen in hadronen en mesonen is de samenstelling van het gas aanmerkelijk eenvoudiger geworden. Het bestaat nu grotendeels uit protonen en neutronen, en de elementaire leptonen het kader op de volgende pagina: het elektron, het muon en tau-deeltje met de bijbehorende neutrino-soorten komen veelvuldig voor. Andere deeltjes zijn in het algemeen instabiel. Ze worden wel geproduceerd bij botsingen, maar vervallen weer snel.

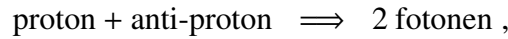
Ook antideeltjes, zoals het anti-proton en het positron (anti- elektron) worden bij botsingen tussen deeltjes in het hete gas veelvuldig geproduceerd. Deze productie gaat door totdat de temperatuur zo ver zakt dat de botsingen niet langer intens genoeg zijn om deze deeltjes te produceren. Bijvoorbeeld: de energie die nodig is om een proton/anti-proton paar te maken bij botsingen tussen twee fotonen met typische energie $k_b T$ correspondeert met een temperatuur

$$k_b T \simeq m_p c^2 \iff T \simeq 10^{13} \text{ K} . \quad (11.5.1)$$



Figuur 11.2: Een schematische voorstelling van de verschillende fasen in de samenstelling van ons expandierend heelal gedurende de eerste ~350.000 jaar na de Oerknal.

Zakt de temperatuur in het heelal beneden deze waarde dan is dit productie proces niet langer mogelijk. Protonen en anti-protonen vernietigen elkaar dan onder het uitzenden van twee fotonen per reactie,



en het overschot aan protonen blijft over. Dat er zo'n overschot moet zijn geweest blijkt uit het simpele feit dat we in het huidige heelal wel materie zien, maar vrijwel geen anti-materie.

Omdat neutronen later in het verhaal een belangrijke rol spelen bekijken we die even in wat meer detail. Neutronen zijn weliswaar elektrisch neutraal, en interageren in principe veel minder sterk dan elektrisch geladen deeltjes, maar hun concentratie wordt op peil gehouden door reacties van de soort

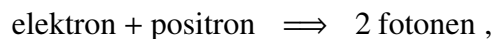


die plaatsvinden zolang neutrino's nog voldoende interageren met de rest van de materiële inhoud van het heelal.

Zoals we in boven hebben gezien wordt het heelal doorzichtig voor neutrino's als de temperatuur zakt beneden $T \simeq 1.5 \times 10^{10}$ K. Net iets eerder is ook de productie van elektron-positron paren bij de botsing tussen twee thermische fotonen niet langer mogelijk. De kritische (minimaal benodigde) temperatuur voor dat proces volgt uit het analogon van relatie (11.5.3):

$$k_b T \simeq m_e c^2 \iff 5 \times T \simeq 10^{10} \text{ K} . \quad (11.5.3)$$

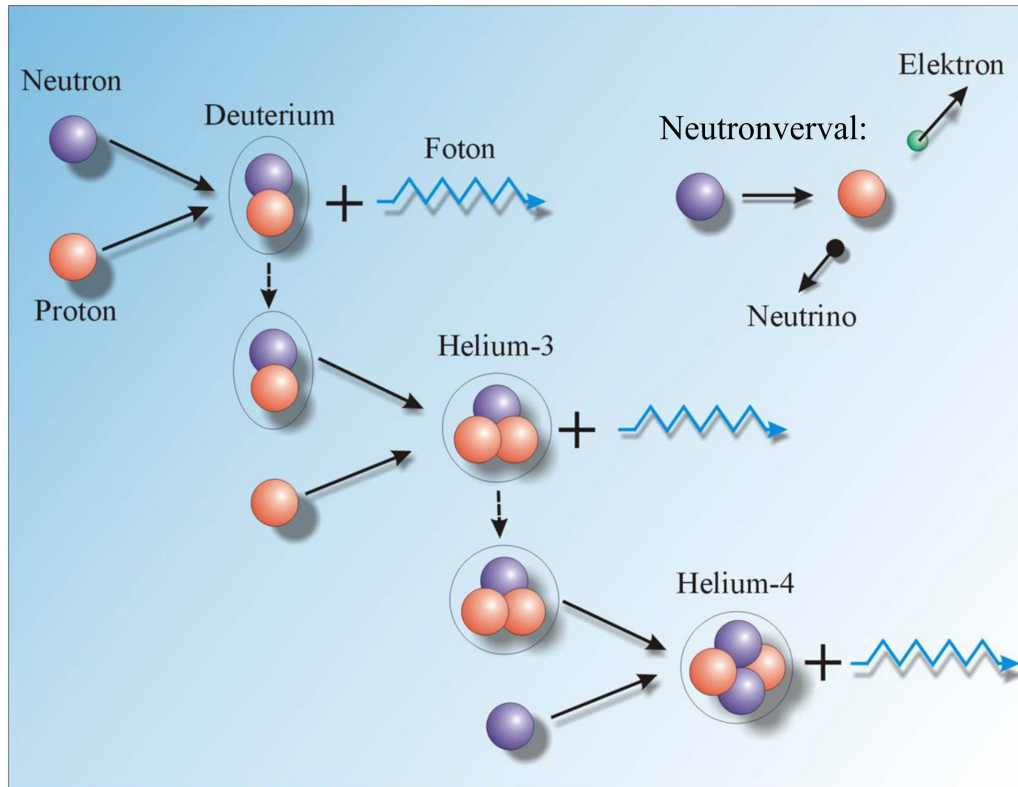
In de praktijk gaat het proces ook bij iets lagere temperatuur door, omdat er altijd fotonen zijn met een iets grotere energie dan het gemiddelde. Elektronen en positronen vernietigen elkaar dan via de reactie



en het overschot aan elektronen blijft over: precies genoeg om het heelal elektrisch neutraal te houden, één elektron voor ieder proton.

De voorwereldlijke nucleosynthese: ($10^{10} > T > 10^8$ K , $0,1 \text{ s} < t < 1000 \text{ s}$)

Gedurende een periode van zo'n 15 minuten worden in het hete oergas een aantal lichte elementen gevormd. In figuur 11.3 staan de kernreacties afgebeeld die in deze periode hebben plaatsgevonden. Dit proces is de *voorwereldlijke nucleosynthese* die al eerder ter sprake is gekomen.



Figuur 11.3: De eerste stappen in de verbranding (fusie) van waterstof naar zwaardere elementen zoals helium. Dit proces vond gedurende ongeveer 15 minuten plaats in het vroege heelal, en is nu de belangrijkste energiebron in de kern van de Zon en andere sterren van vergelijkbaar type.

Dat deze periode maar zo kort duurt heeft twee redenen. Bij temperaturen boven 10^{10} K zijn de botsingen in het gas te intens: gevormde kernen worden meteen weer uit elkaar geslagen. Met name voor deuteriumkernen (zwaar waterstof) is dat het geval: deuterium is een zeer fragiel atoom! En juist deuterium is nodig als eerste product in het fusieproces. Bij temperaturen beneden de 10^8 K zijn de botsingen niet langer intens genoeg om een positief geladen proton of atoomkern een andere atoomkern voldoende dicht te doen naderen, tegen de afstotende elektrostatische kracht van deze (eveneens positief geladen) atoomkern in. De sterke kernkracht (met zijn beperkte reikwijdte) krijgt dan geen vat op het proton of de kern zodat geen zwaarder element (met meer protonen in de kern) kan worden gevormd.

Een tweede beperking is het feit dat vrije (niet in een atoomkern opgesloten) neutronen niet stabiel zijn: zij vervallen met een halfwaardetijd van ongeveer 10 minuten. Bij gebrek aan vrije neutronen stopt de kernfusie ook: in een aantal stappen in het reactieschema van figuur 11.3 zijn vrije neutronen essentieel.

De vorming van de 3K achtergrondstraling: ($T \approx 3500$ K , $t \approx 350,000$ jaar)

Als de temperatuur tot ongeveer $T \approx 10.000$ K is gezakt beginnen de positief geladen atoomkernen de tot dan toe los rondvliegende negatief geladen elektronen in te vangen. Dit proces noemt men *recombinatie*. Waterstofkernen (protonen) vangen één elektron in, en vormen een waterstof-atoom, Heliumkernen vangen ieder twee elektronen.

Tot op dat moment worden fotonen heel effectief verstrooid door de vrije elektronen. Dat is een elektromagnetisch proces dat Thomson-verstrooiing wordt genoemd. Door die verstrooiing is het waarneembare deel van het vroege heelal volstrekt ondoorzichtig zolang er nog genoeg vrije elektronen zijn.

In dit geval speelt echter niet de directe verdunning van het aantal deeltjes door de expansie van het heelal een doorslaggevende rol, maar de *ionisatiegraad* van het gas. Deze wordt snel kleiner als de temperatuur verder daalt. Wanneer de temperatuur is gezakt tot zo'n $T \approx 3500$ K is het aantal vrij rondvliegende elektronen ten gevolge van de recombinatie dusdanig afgenomen dat het heelal doorzichtig wordt voor fotonen. De fotonen ontkoppelen dan, net zoals de neutrino's dat al veel eerder deden. De fotonen die bij de ontkoppeling vrij rondvliegen zijn vinden we nu nog terug als de fotonen van de kosmische achtergrondstraling. In al die tijd zijn ze natuurlijk wel met een factor ~ 1200 roodverschoven.

De Dark Ages: ($3500 > T > 30$ K , $350.000 \leq t \leq 35$ miljoen jaar)

Na de recombinatie is het bestaat het gas dat het heelal vult vooral uit neutraal waterstofgas, met zo'n 25% in gewicht aan heliumgas. Omdat dit gas niet langer koppelt aan de vele fotonen in de kosmische achtergrondstraling (er zijn ongeveer een miljard fotonen per waterstofatoom) beginnen minieme massa-concentraties (onder invloed van de zwaartekracht) te groeien doordat zij materie uit hun omgeving aantrekken. Vóór de recombinatie was dat proces niet mogelijk: de wisselwerking tussen fotonen en het geïoniseerde gas leidde tot een wrijvingskracht die de groei van kleine massa-concentraties onderdrukte. Uiteindelijk groeien die massa-concentraties uit tot sterren, sterrenstelsels en groepen van sterrenstelsels. Maar in deze fase sterren nog niet gevormd, en het enige licht in het heelal is het licht van de kosmische achtergrondstraling. Vandaar de naam *Dark Ages*.

Je zou wellicht verwachten dat het merendeel van het diffuse gas in ons heelal (dat gas dat niet is samengebald in sterren) ook nu nog zou bestaan uit neutraal waterstof en helium. Dat blijkt niet het geval te zijn. Dergelijk neutraal gas kan licht absorberen in absorptielijnen, en de waarnemingen tonen geen tekenen van die absorptie van licht op kosmologische afstanden².

²Als men kijkt rond groepen sterrenstelsels is dat anders: daar zweeft nog voldoende 'overgebleven' gas rond om een zichtbare lichtabsorptie te veroorzaken.

De reden voor deze situatie is simpel: de eerste generaties sterren zijn zeer helder, en zenden genoeg hoog-energetische (ultra-violet) fotonen uit om het diffuse gas in het heelal opnieuw te ioniseren. Met de vorming van de eerste sterren komen de *Dark Ages* tot een eind.

Deze her-ionisatie van het diffuse gas door sterlicht zorgt er echter niet voor dat het heelal weer ondoorzichtig wordt: de dichtheid van de vrije elektronen is veel te klein! Een eenvoudige berekening toont dat aan.

De her-ionisatie vindt (volgens de laatste PLANCK gegevens) plaats bij een roodverschuiving $z_{\text{hi}} \approx 11$. Op dat moment is de schaalfactor gelijk aan (als we $R_0 = 1$ kiezen)

$$R_{\text{hi}} = \frac{1}{1 + z_{\text{hi}}} \approx 0,08 . \quad (11.5.4)$$

Bij de recombinatie was de temperatuur ruwweg $T_{\text{rec}} = 3500$ K, wat correspondeert met een schaalfactor

$$R_{\text{rec}} = \frac{T_0}{T_{\text{rec}}} \approx 7,7 \times 10^{-4} . \quad (11.5.5)$$

Gebruikt is dat $T \propto R^{-1}$ en dat $T_0 \approx 2,7$ K. Het heelal is tussen de recombinatie van waterstof en de her-ionisatie dus met een factor

$$\frac{R_{\text{hi}}}{R_{\text{rec}}} \approx 10^2 \quad (11.5.6)$$

geëxpandeerd. Zelfs als alle elektronen weer zouden vrijkomen bij her-ionisatie is hun dichtheid een factor $(10^2)^3 = 10^6$ kleiner dan net voor recombinatie. De vrije weglengte voor fotonen is omgekeerd evenredig is met die dichtheid. De vrije weglengte is direct na de her-ionisatie dus dezelfde factor groter dan de waarde bij vlak voor recombinatie, ongeveer 10.000 lichtjaar. Dat komt neer op een afstand van $\approx 10^{10}$ lichtjaar, tien keer groter dan de horizonafstand op dat moment, zo'n 10^9 lichtjaar. Het heelal blijft dus na her-ionisatie gewoon doorzichtig.

Appendix 1: Enkele karakteristieke grootheden

Sterrenkundigen gebruiken een eenhedenstelsel dat niet erg goed aansluit bij de ingeburgerde manier waarop wij in het dagelijks leven gewoon zijn om afstanden, tijden en gewichten bepalen. Het meest bekende voorbeeld van de verwarring die daarbij kan ontstaan is wel de term "lichtjaar", de benaming voor de *afstand* die het licht in één jaar aflegt.

In onderstaande tabellen volgt een opsomming van de typische waarde van sterrenkundige en kosmologische grootheden die in dit boek een belangrijke rol spelen. Hierbij betekent de notatie 10^{26} een 1 met 26 nullen, dus: honderd = 10^2 , duizend = 10^3 , één miljoen = 10^6 , één miljard = 10^9 , en één biljoen = 10^{12} .

Kosmologische grootheden

Hubble constante	H_0	$= 67,3 \pm 1.2$ km/s per Mpc
Leeftijd van het heelal	t_0	$\approx 13,8 \pm 0,05$ miljard jaar
Omega-parameter koude materie	Ω_0^{stof}	$= 0,32 \pm 0,02$
Omega-parameter straling	$\Omega_0^{\text{straling}}$	$= (9,5 \pm 0,2) \times 10^{-5}$
Omega-parameter vacuüm-dichtheid	Ω_0^{vac}	$= 0,68 \pm 0,02$
Afmeting van een sterrenstelsel		≈ 300.000 lj
Aantal sterren in een sterrenstelsel		$\approx 10^{11}$
Massa van een sterrenstelsel		$\approx 10^{11} M_{\odot} = 10^{41}$ kg.
Afmeting van een groep sterrenstelsels		$\approx 2 - 10$ miljoen lichtjaar
Aantal sterrenstelsels in zo'n groep		$\approx 20 - 200$
Afmeting waarneembaar heelal (horizon)	D_{hor}	≈ 40 miljard lichtjaar
Grootste waargenomen roodverschuiving van een individuele bron		$z \sim 9$
Aantal sterrenstelsels binnen de horizon		$\approx 10^{10}$
Aantal fotonen in het waarneembaar heelal		$N_{\gamma} \approx 10^{87}$ (achtergrondstraling)
Aantal baryonen in het waarneembaar heelal		$N_B \approx 10^{78}$

Astronomische grootheden

Astronomische afmetingen	
Doorsnede Aarde	12.800 kilometer
Doorsnede Zon	1 miljoen kilometer
Afstand Aarde-Zon (Astronomische Eenheid)	150 miljoen kilometer
Afmeting Zonnestelsel	10 miljard kilometer
Lichtjaar	9,5 biljoen kilometer
Doorsnede Melkwegstelsel	80.000 lichtjaar
Afstand tot Andromeda nevel	2 miljoen lichtjaar
Doorsnede cluster	2 – 10 miljoen lichtjaar
Doorsnede waarneembaar heelal	~ 60 miljard lichtjaar
Astronomische leeftijden	
Leeftijd Aarde	5 miljard jaar
Levensduur sterren	1 – 100 miljard jaar
Omlooptijd Zon rond Melkwegcentrum	250 miljoen jaar
Leeftijd heelal	13,8 miljard jaar

Een vermogen van 1 Watt komt overeen met 1 J/s. Een gloeilamp, en de biologische verbrandingsprocessen in het menselijk lichaam, produceren een vermogen van ongeveer 100 Watt.

Natuurconstanten (SI stelsel)

Grootheid	symbool	waarde in SI
Lichtsnelheid	c	$2,998 \times 10^8$ m/s
Gravitatieconstante	G	$6,67 \times 10^{-11}$ Nm ² /kg ²
Constante van Planck	h	$6,626 \times 10^{-34}$ J s
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1,05 \times 10^{-35}$ J s
Boltzmann constante	k_b	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K
Elektronmassa	m_e	$9,11 \times 10^{-31}$ kg
Protonmassa	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg

Astronomische constanten

1 jaar	j	= $3,156 \times 10^7$ s
parsec	pc	= $3,086 \times 10^{16}$ m
kiloparsec	kpc = 10^3 pc	= $3,086 \times 10^{19}$ m
megaparsec	Mpc = 10^6 pc	= $3,086 \times 10^{22}$ m
gigaparsec	Gpc = 10^9 pc	= $3,086 \times 10^{25}$ m
lichtjaar	lj	= $9,463 \times 10^{15}$ m
Zonsmassa	M_\odot	= $1,989 \times 10^{30}$ kg
Zonlichtkracht	L_\odot	= $3,862 \times 10^{26}$ J/s

Wiskundige Appendix

1: Exponentiële functies

De *exponentiële functie* $f(x) = e^x$, met $e = 2,718281828\dots$, is de unieke functie waarvan de afgeleide gelijk is aan zich zelf:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = f(x) = e^x. \quad (1)$$

Ook de volgende relatie is van belang:

$$f^\alpha(x) = (e^x)^\alpha = e^{\alpha x}. \quad (2)$$

In het bijzonder voor $\alpha = -1$:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}. \quad (3)$$

Nauw verwant is de meer algemene functie

$$g(x) = A e^{\lambda x} \quad (4)$$

met A en λ constantes, die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dg}{dx} = \lambda g(x). \quad (5)$$

Een voorbeeld uit de natuurkunde is het verval van een radioactief element, waarbij het aantal atomen $N(t)$ van dat element voldoet aan

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau}, \quad (6)$$

met τ de vervaltijd. De oplossing is:

$$N(t) = N(0) e^{-t/\tau}, \quad (7)$$

dus $x = t$, $A = N(0)$ (= het aantal atomen op $t = 0$) en $\lambda = -1/\tau$.

Nauw verwante functies zijn de *hyperbolische cosinus* en de *hyperbolische sinus*, die formeel worden gegeven door:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right), \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right). \quad (8)$$

Deze twee functies hebben de volgende eigenschappen:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad (9)$$

$$\frac{d \cosh(x)}{dx} = \sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}, \quad \frac{d \sinh(x)}{dx} = \cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}. \quad (10)$$

Bovendien voldoen zij voor $x \gg 1$ (zodat $e^x \gg 1$ en $e^{-x} = 1/e^x \ll 1$) aan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \frac{1}{2}e^x. \quad (11)$$

Eigenschap (9) is simpel te bewijzen, gebruikmakend van $e^{-x} = 1/e^x$, wat leidt tot:

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) &= \frac{1}{4} \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}), \\ \sinh^2(x) &= \frac{1}{4} \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2x} - 2 + e^{-2x}), \end{aligned} \quad (12)$$

Eigenschappen (10) volgen door het toepassen van relatie (5).

2: De natuurlijke logaritme

De natuurlijke logaritme, gewoonlijk aangeduid als 'ln', is de logaritme met het grondtal e . In de praktijk betekent dit:

$$\ln(e^x) = x, \quad \ln(e^{\lambda x}) = \ln((e^x)^\lambda) = \lambda \ln(e^x) = \lambda x. \quad (13)$$

De meer vertouwde logaritme met grondtal 10 wordt in de sterrenkunde vaak aangeduid met \log of \log_{10} . In die laatste notatie zouden we kunnen schrijven $\ln = \log_e$, maar dat is niet gebruikelijk. Voor de natuurlijke logaritme gelden alle rekenregels die ook voor \log gelden, bijvoorbeeld:

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B, \quad \ln(A/B) = \ln A - \ln B, \quad \ln(A^\alpha) = \alpha \ln A. \quad (14)$$

Belangrijk is dat de afgeleide van de functie $f(x) = \ln x$ voldoet aan:

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}. \quad (15)$$

3: Machtswetten

Bekijk de functie $f(x) = Ax^\alpha$ met A en α twee constanten. Dit is een *machtswet*: $f(x)$ is een macht van x . Deze definitie is zinvol voor iedere reële waarde van α , en dus hoeft α niet een geheel getal te zijn. De afgeleide van deze functie is

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d (A x^\alpha)}{dx} = \alpha A x^{\alpha-1}. \quad (16)$$

De definitie van $f(x)$ stelt ons in staat te schrijven $x^\alpha = f(x)/A$ zodat moet gelden:

$$x = \left(\frac{f(x)}{A} \right)^{1/\alpha}. \quad (17)$$

Vullen we deze uitdrukking voor x in termen van $f(x)$, A en α in relatie (16) in dan kan men schrijven:

$$\frac{d f(x)}{dx} = \alpha A \left(\frac{f(x)}{A} \right)^{(\alpha-1)/\alpha} = B f^\beta. \quad (18)$$

Hier definiëren wij:

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \quad B = \alpha A^{1/\alpha}. \quad (19)$$

Hieruit volgt een belangrijke eigenschap van machtswetten:

De afgeleide df/dx van een machtswet $f(x)$ is zelf een macht van $f(x)$.

Wij zullen een aantal voorbeelden tegenkomen van vergelijkingen die er uitzien als

$$\frac{d f(x)}{dx} = B f^\beta . \quad (20)$$

Uit het voorgaande weten wij dan meteen dat we als probeeroplossing

$$f(x) = Ax^\alpha \quad (21)$$

kunnen gebruiken.