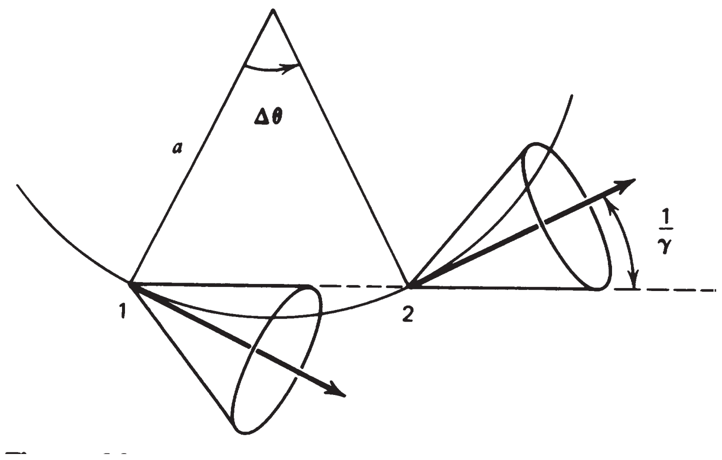
Physics of AGN
Synchrotron Radiation

Dr. Heino Falcke
MPIfR & Universität Bonn



Contents:

- charge in B-field
- single electron
- synchrotron emission
- synchrotron absorption

Literature:
"Radiative Processes in Astrophysics", G.B. Rybicki & A.P. Lightman, John Wiley & Sons, New York (Chap. 6)

Synchrotron Emission

■ Grundlagen

Rybicki & Lightman, Chapter 6 (S. 167-194)

"Synchrotronstrahlung" entsteht durch die relativistische Bewegung geladener Teilchen in einem Magnetfeld.

Anwendungsgebiete

- Radio galaxies (jets)
- x-ray emission from BL Lacs
- Supernovae
- Non-thermal radiation from stars
- Magnetic filaments (Galactic Center)
- Galaxy and Cluster Halos

Synchrotron Strahlung

■ Grundlagen

Strahlung eines geladenen Teilchens im Magnetfeld:

Analog zu dem Dipolmoment

$$d = \Sigma_i e_i r_i$$

zweier geladener Teilchen (z.B. frei-frei), wo gilt

$$P = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3}$$

ist die Strahlungsleistung eines geladenen Teilchens (da steckt der Poynting-Vektor drin), gegeben zu

$$P = \frac{2q^2\ddot{\vec{a}}^2}{3c^3}.$$

(Larmor Formel)
Die Bewegung des Teilchens ist gegeben durch die Lorentzkraft

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$$

in kovarianter Form für $E = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}$$

Und aus der Energieerhaltung $\left(\vec{v} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = 0!\right)$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E} = 0 \text{ da W=const}$$

folgt

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = q\vec{v}\cdot\vec{E} = 0$$

d.h. γ =const, bzw. $\left|\vec{\beta}\right| = |\vec{v}/c|$ =const ($\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$). Das können wir für die Bewegungsgleichung benutzen:

$$\Rightarrow \gamma m\frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}$$

(Beachte: $|\vec{v}|$ =const, aber $\vec{v}$ kann die Richtung ändern)
Da $\vec{v}\times\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{B}$ steht ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit $v_{\|}$ entlang der Magnetfeldlinien gleich Null und wir haben

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{\|} = 0, \quad \frac{d}{dt}\vec{v}_{\perp} = \frac{q}{\gamma mc}\vec{v}\times\vec{B}$$

d.h. wir haben eine konstante Vorwärtsbewegung entlang des Magnetfeldes mit permanenter Beschleunigung senkrecht dazu (Kreisbahn) $\Rightarrow$ helikale Bahn. Die Frequenz der Bewegung $(1/\tau)$ ist dann

$$\omega_{\mathrm{B}} = \frac{eB}{\gamma mc}$$

d.h. wir haben die Beschleunigung $a' = \omega_{\mathrm{B}} v_{\perp}$ und im Beobachtersystem ist $a_{\perp} = \gamma^2 a'_{\perp}$, so daß wir mit der Larmor Formel ($P = \frac{2q^2\ddot{\vec{a}}^2}{3c^3}$)

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4\frac{q^2B^2}{\gamma^2m^2c^2}v_{\perp}^2$$

(Also: Protonen-Synchrotronstrahlung ist vernachlässigbar)
Mit dem klassischen Elektronenradius

$$r_{\mathrm{ce}} = \frac{e^2}{mc^2}$$

können wir auch schreiben

$$P = \frac{2}{3} r_{\mathrm{ce}}^2 c \beta_\perp^2 \gamma^2 B^2$$

Für eine isotrope Geschwindigkeitsverteilung müssen wir über alle möglichen Anstellwinkel (Pitchangle) α der helikalen Bahnen mitteln.

$$\left\langle \beta_\perp^2 \right\rangle = \frac{\beta^2}{4\pi} \int \sin^2 \alpha d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta d\phi = \frac{2}{3}\beta^2$$

so daß

$$P = c \left(\frac{2}{3} r_{\mathrm{ce}} \gamma \beta B \right)^2$$

oder auch

$$P = \frac{4}{3} \sigma_{\mathrm{T}} c \left(\gamma\beta\right)^2 U_{\mathrm{b}}$$

wobei

$$\sigma_{\mathrm{T}} = \frac{8\pi}{3} r_{\mathrm{ce}}^2$$

der Thomson Streuquerschnitt und

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{B^2}{8\pi}$$

die magnetische Energiedichte ist (dieser Strahlungsprozeß kann nämlich auch als Streuung eines virtuellen Photons, welches das B-Feld übermittelt, verstanden werden).

Synchrotron Spektrum

■ Relativistische Effekte

Rybicki & Lightman, Chapter 6 (S. 167-194)

Wenn die Geschwindigkeit der Elektronen subrelativistisch wäre, würden die Elektronen mit ihrer Umlauffrequenz strahlen. Bei relativistschen Geschwindigkeiten wird die Strahlung in die Bewegungsrichtung gebeamt und die Frequenz unterliegt ebenfalls relativistischer Rot- und Blauverschiebung.

Das Frequenzspektrum der Synchrotronstrahlung ist erheblich größer als $\omega_{\mathrm{B}} = \frac{eB}{\gamma mc}$.

Bei jeder Umrundung des Elektrons sieht der Beobachter nur einen kurzen Strahlenblitz, wenn er sich innerhalb des Boostingkegegels mit der halben Öffnungsbreite $1/\gamma$ befindet (Leuchtturmeffekt).

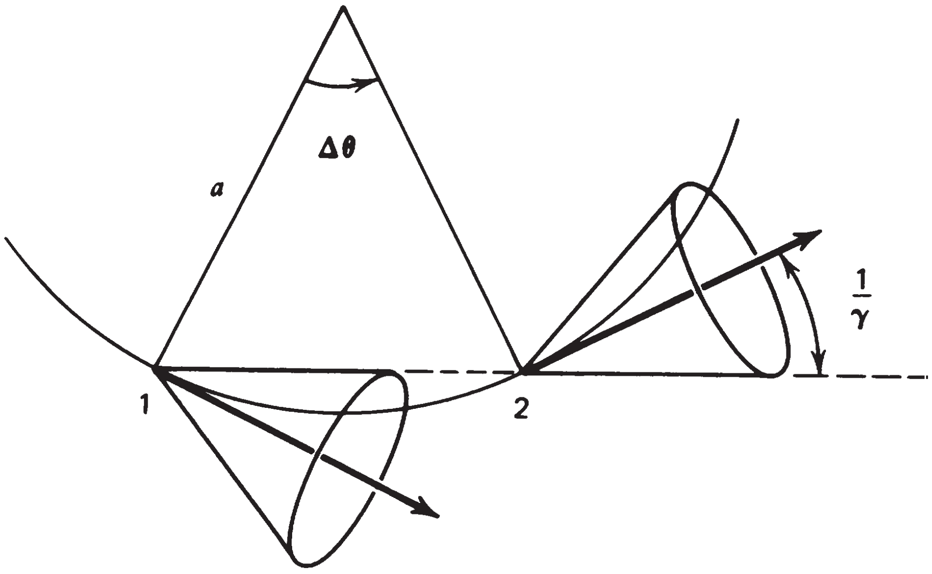
Der Radius der projezierten Kreisbahn ist (wg. $\omega = 2\pi/T$) gegeben durch

$$v = \frac{U}{T} = \frac{2\pi r}{T} = \omega r \Rightarrow r = \frac{v}{\omega},$$

d.h. der gesamte Krümmungsradius ist gegeben durch

$$r = \frac{v}{\omega_{\mathrm{B}} \sin\alpha}$$

wenn man den Anstellwinkel berücksichtigt (zwischen Feld- und Geschwindigkeitsvektor) – bei $\alpha = 0°, r \to \infty$ gibt es keine Kreisbahn sondern nur eine Bewegung parallel zum Feld.



Die Winkeldifferenz für die der Blitz sichtbar ist, entspricht dem Öffnungswinkel des Lichtkegels $2/\gamma$ und die vom Elektron zurückgelegte Wegstrecke is $\Delta s = \Delta\theta r = 2r/\gamma$

$$\Rightarrow \Delta s = \frac{2v}{\gamma\omega_{\mathrm{B}}\sin\alpha} \Rightarrow \Delta t = \frac{2}{\gamma\omega_{\mathrm{B}}\sin\alpha}$$

Die Zeitdifferenz Δt_{obs}, welche der Beobachter wahrnimmt ist aber um den Faktor $1 - v/c$ kürzer, da das Licht das zu Beginn des Blitzes ausgesandt wurde schon eine Strecke $\Delta s \cdot v/c$ zurückgelegt hat. Also ist

$$\Delta t_{\mathrm{obs}} = \frac{2}{\gamma\omega_{\mathrm{B}}\sin\alpha}(1 - \frac{v}{c})$$

Taylorentwicklung von $(1-\beta) = \left(1 - \sqrt{1-\gamma^{-2}}\right)$ um 0 bzw. für $\gamma \to \infty$ (da $v \sim c$) ergibt

$$1 - \frac{v}{c} \sim \frac{1}{2\gamma^2}$$

und wir haben

$$\Delta t_{\mathrm{obs}} = \frac{1}{\gamma^3\omega_{\mathrm{B}}\sin\alpha},$$

d.h. die Pulsfrequenz ist um einen Faktor γ^3 größer als die Gyrationsfrequenz.
Aus der Unschärferelation für Wellen

$$\Delta\omega\Delta t > 1$$

folgt sofort, daß ein kurzer Puls ein sehr breitbandiges Spektrum mit der höchsten Frequenz im Größenordnungsbereich $1/\Delta t$ hat. Definieren wir deshalb geschickt eine charakteristische Frequenz

$$\omega_{\mathrm{c}} = \frac{3}{2}\gamma^3\omega_{\mathrm{B}}\sin\alpha, \quad \nu_{\mathrm{c}} = \frac{\omega_{\mathrm{c}}}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \omega_{\mathrm{c}} = \frac{3\gamma^2 eB\sin\alpha}{2mc}$$

$$\Rightarrow \nu_{\mathrm{c}} = 1\ \mathrm{MHz}\cdot\gamma^2\left(\frac{B}{\mathrm{G}}\right) \quad \text{für } \alpha = 30^\circ$$

■ Spektrale Form

Das Polardiagramm des E-Feldes is genau durch den Boostingkegel festgelegt. Die zeitliche Entwicklung des E-Feldes ist daher nur eine Funktion des gegenwärtigen Sichtwinkels und des Lorentzfaktors (wegen der relativistischen Aberration) — sonst ändert sich ja mit der Zeit nichts. Wir können also schreiben (im Beobachtersystem):

$$E(t) \propto f(\gamma\theta(t))$$

Es ist anschaulich klar: Wenn sich die Gyrofrequenz nicht ändert ist θ linear in der Zeit und ändert sich darüberhinaus linear mit der Winkelgeschwindigkeit also

$$E(t) \propto g(\omega_{\mathrm{c}}t),$$

d.h. aber natürlich nicht, daß E linear in der Zeit ist. Fouriertransformation in den Frequenzraum liefert dann mit $\xi = \omega_{\mathrm{c}}t$

$$\hat{E}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi)e^{i\omega\xi/\omega_{\mathrm{c}}}d\xi \propto H\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{c}}}\right)$$

Nun ist aber die abgestrahlte Leistung $\frac{dW}{dt\,d\Omega} \propto \hat{E}^2(\omega)$ und wenn wir das durch die Orbitalperiode teilen und über den Raumwinkel integrieren (beide frequenzunabhängig), erhalten wir die Leistung P, ohne daß sich die grundlegende Frequenzabhängigkeit ändert, also

$$P(\omega) = \frac{dW}{dtd\omega} = C_{\mathrm{x}} \cdot F\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{c}}}\right)$$

Daraus ergibt sich die Gesamtleistung

$$P = \int_0^\infty P(\omega) d\omega = C_\mathrm{x} \int_0^\infty F\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right) d\omega = \omega_\mathrm{c} C_\mathrm{x} \int_0^\infty F(x)\, dx$$

wobei $x\omega_\mathrm{c} = \omega$, d.h. $d\omega/dx = \omega_\mathrm{c}$. Das vergleichen wir mit

$$P = \frac{2q^4 B^2 \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \alpha}{3m^2 c^3}$$

und natürlich

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{3\gamma^2 q B \sin\alpha}{2mc}$$

dann erhalten wir

$$\frac{3\gamma^2 q B \sin\alpha}{2mc} C_\mathrm{x} \int_0^\infty F(x)\, dx = \frac{2q^4 B^2 \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \alpha}{3m^2 c^3}$$

$$C_\mathrm{x} \int_0^\infty F(x)\, dx = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{q^3 B \beta^2 \sin\alpha}{mc^2}$$

Da $\int_0^\infty F(x)\, dx$ nur eine Zahl ist und beliebig normiert werden kann (wir kennen $F(x)$ ja nicht) läßt sich die Konstante bestimmen, und es folgt mit prophetischer Wahl der Normierungskonstante für den relativistischen Fall ($\beta \simeq 1$):

$$P(\omega) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right) \frac{e^3 B \sin\alpha}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right)$$

$$P(\nu) = 2\pi P(\omega) \quad (d)\omega = 2\pi (d)\nu$$

Asymptotische Werte für $F\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right)$ sind:

$$F\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right) \sim \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}, \quad x \ll 1$$

$$F\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right) \sim \frac{\pi}{2}^{1/2} e^{-x} x^{1/2}, \quad x \gg 1$$

Synchrotron Emission

■ Potenzspektrum

Wenn wir ein Potenzgesetz als Verteilungsfunktion der Elektronen haben, also

$$\frac{dN(\gamma)}{d\gamma} = C\gamma^{-p}$$

dann ist das Spektrum

$$P(\omega) \propto \int_0^\infty F\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right)\gamma^{-p} d\gamma$$

Mit der Substitution $x = \omega/\omega_\mathrm{c}$ und $\omega_\mathrm{c} \propto \gamma^2$, also $x \propto \omega/\gamma^2$, d.h. $\gamma \propto \sqrt{\omega/x}$ folgt

$$d\gamma/dx \propto \omega^{1/2}\gamma^{-3/2}$$

$$P(\omega) \propto \int_0^\infty F\left(x\right)\omega^{-p/2}x^{-p/2}\omega^{1/2}\gamma^{-3/2}dx \propto \omega^{\frac{(1-p)}{2}}\int_0^\infty F\left(x\right)x^{\frac{p-3}{2}}dx$$

das Integral ist eine Konstante und daher ist das Synchrotronspektrum wieder ein Potenzgesetz mit Spektralindex $\alpha = \frac{1-p}{2}$.

Typische Werte sind $\alpha = -0.5$ - $-1 \Rightarrow p = 2$ - 3.

Genauer ausgerechnet ist die Leistung pro Volumen und Frequenz gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dtd\nu d\omega dV} &= \frac{\sqrt{3}q^3CB\sin\alpha}{2\pi mc^2(p+1)} \\ &\quad \Gamma\left(\frac{p}{4}+\frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{12}\right)\left(\frac{mc\omega}{3eB\sin\alpha}\right)^{-(p-1)/2}\end{aligned}$$

Die Normalisierungskonstante C wird normalerweise so bestimmt, daß man annimmt, daß die relativistischen Teilchen (d.h. das Integral ihrer Verteilungsfunktion mal der Energie) im Energiegleichgewicht mit dem magnetischen Feld sind, d.h. $C \propto B^2$.

Für $p = 2$ haben wir z.B. $C \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \gamma^{-2} \cdot \gamma m c^2 d\gamma = B^2/8\pi$ $\Rightarrow C = B^2/(8\pi m_\mathrm{e} c^2 \ln(\gamma_2/\gamma_1))$

Wenn wir annehmen, daß $\gamma_2/\gamma_1 \sim 10^4$ können wir die erwartete Flußdichte für eine spärische Quelle mit Radius R in der Entfernung D ausrechnen:

$$\begin{aligned} S_\nu &= \frac{dW}{dt\nu d\omega dV} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi D^2} \\ &= 210\,\mathrm{Jy} \left(\frac{B}{\mathrm{mGauss}}\right)^{3.5} \left(\frac{R}{\mathrm{kpc}}\right)^3 \left(\frac{\nu}{\mathrm{GHz}}\right)^{-0.5} \left(\frac{D}{\mathrm{Gpc}}\right)^{-2} \end{aligned}$$

Dies ist also sehr stark abhängig vom Magnetfeld und von der Größe des Gebietes. Der Fluß ist nicht proportional zur Energiedichte (B^2) im Magnetfeld, sondern $\propto U_\mathrm{B}^{1.75}$.

Synchrotronstrahlung ist linear ($\vec{B}$) polarisiert (elliptische Komponente kürzt sich weg bei isotroper Verteilung), maximal 75%. Für Potenzverteilung ist $\Pi = \frac{p+1}{p+\frac{7}{3}}$ (69% für $p = 2$).

Synchrotron Absorption

Synchrotron Absorption ist: (z.B. aus Einsteinkoeffizienten, oder aus der Forderung, daß bei einer thermischen Verteilung im optisch dicken Bereich Planck-Strahlung herauskommen muß)

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= (m_\mathrm{e}c^2)^{p-1}\frac{\sqrt{3}q^3C(B\sin\alpha)^{(p+2)/2}}{8\pi m}\left(\frac{3q}{2\pi m^3c^5}\right)^{p/2}\\ &\quad \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\nu^{-(p+4)/2}\end{aligned}$$

Der Vorfaktor $(m_\mathrm{e}c^2)^{p-1}$ korrigiert einen Fehler in R&L.
Die Quellfunktion ist

$$S_\nu = \frac{P(\nu)}{4\pi\alpha_\nu} \propto \nu^{5/2}$$

was gleichzeitig das Spektrum im optisch dicken Bereich angibt. Wir haben also ein Spektrum mit Spektralindex $\alpha = 2.5$ im optisch dicken Bereich und mit $\alpha = -0.5$ (für p=2) im optisch dünnen Bereich.

Wenn $\nu \lesssim \nu_\mathrm{c}(\gamma_1)$ (niederenergetischer cut-off in der Elektronenverteilung) dann wird im optisch dicken Fall $\alpha = 2$ (Planck) und im optisch dünnen Fall $\alpha = 1/3$ (mono-energetisches Spektrum).

Die optische Dicke einer Quelle mit Weglänge R entlang des Sehstrahles ist

$$\tau = \alpha_\nu R = 1.6\cdot 10^{-3}\left(\frac{B}{\mathrm{mGauss}}\right)^4\left(\frac{R}{\mathrm{kpc}}\right)\left(\frac{\nu}{\mathrm{GHz}}\right)^{-3}$$

Die Selbstabsorptionsfrequenz $\nu_{\rm ssa}$ ist gegeben durch die Bedingung $\tau = 1$:

$$\nu_{\rm ssa} = 117\,{\rm MHz}\left(\frac{B}{\rm mGauss}\right)^{4/3}\left(\frac{R}{\rm kpc}\right)^{1/3}$$

Wenn wir die Emissionsformel benutzen, eine gemessene Flußdichte S_ν voraussetzen, das Magnetfeld ausrechnen und dann in die obige Formel einsetzen, dann erhalten wir:

$$\nu_{\rm ssa} = 6\,{\rm MHz}\left(\frac{S_\nu}{\rm Jy}\right)^{8/17}\left(\frac{D}{\rm Gpc}\right)^{8/17}\left(\frac{R}{\rm kpc}\right)^{-1}$$

Bei gemessenen Flüssen um 1 Jy bei typischen starken Quellen und Beobachtungsfrequenzen im GHz-Bereich ist klar, daß Selbstabsorption nur in sehr kompakten Quellen eine Rolle spielt, wo $r/D \sim 1$ milli-arsecond.

$\Rightarrow$ Lobes von Radiogalaxien sind optisch dünn

$\Rightarrow$ Kerne von Radiogalaxien sind optisch dick