Zur Theorie strahlungsgetriebener Scheibenwinde in Quasaren

Diplomarbeit

vorgelegt von

Heino Falcke

aus

Köln

BONN, März 1992

1. Referent: Prof. Dr. P.L. Biermann

2. Referent: Prof. Dr. H.J. Fahr

This whole way of thinking and acting rests on the assumption that reality is reliable, not that disasters, and failures, and evil things will never happen, but that the world in which they happen ultimately makes sense. It is not just 'buzzing, booming confusion' but springs from the will of a creator whose purposes are trustworthy and whose ultimate aim is glorious however dark and mysterious the way to it.

(John Habgod in "Can Scientists Believe?", Ed. Sir Nevill Mott, 1991)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Seit der Entdeckung der Quasare durch [Schmidt 1963] und dem Beginn der Forschung an Aktiven Galaktischen Kernen (AGN) ist es ein Hauptanliegen gewesen, die Ursache der gigantischen Energiequellen im Zentrum dieser weit entfernten Galaxien verstehen zu lernen. Solche Quellen können scheinbar mühelos eine Gesamtleuchtkraft von $10^{47}\mathsf{erg/s}$ in ihren nur wenige Lichtjahre großen, zentralen Gebieten erzeugen. Aus energetischen Gründen kann man sich überlegen, daß eine Quelle, die auf so kleinem Raum so große Energien freisetzt, nur durch Gravitationsenergie gespeist werden kann.

Schon bald hat sich deshalb für die zentrale Maschine in AGN's ein Standardmodell entwickelt, das von der Annahme einer großen Massenansammlung, z.B. in Form eines schwarzen Loches von 10^6 bis 10^{11} Sonnenmassen, im Zentrum einer Galaxie ausgeht. Interstellares Gas und Staub wird dann von der Zentralmasse akkretiert. Das Herabsinken im Potententialtopf der Zentralmasse setzt dann im Prinzip genügend Energie frei, um die beobachteten hohen Energien zu erklären.

Diese Grundüberlegungen führten schon bald zu Theorien über die Natur dieser Akkretionsprozesse. Aus einer ganz anderen Motivation heraus, nämlich aus dem Versuch, die Entstehung unseres Planetensystems und seiner scheibenförmigen Anordnung zu verstehen, war, zumindest einem Teil der Forscher, schon sehr früh klar [Weizsäcker 1948, Lüst 1952], daß die Rotation einer Gasmasse beim Akkretionsprozeß zur Ausbildung einer Scheibe führt.

Diese Theorie wurde dann durch grundlegende Arbeiten von [Lynden-Bell und Pringle 1974] und [Shakura und Sunyaev 1973], die sich auf die Betrachtung dünner Scheiben beschränkten, soweit ausgearbeitet, daß Vergleiche mit den Beobachtungen möglich waren. Bei der Anwendung auf AGN [Shields 1978, Malkan und Sargent 1982, Laor und Netzer 1989] stellte man fest, daß sich eine typische Eigenschaft der Quasarspektren, der UV-Bump, durch eine Akkretionsscheibe besonders gut erklären läßt. Der UV-Bump ist ein breiter Buckel im Spektrum fast aller Quasare [Sanders *et al* 1989] mit einem Maximum im ultravioletten Bereich des Spektrums. Man nimmt an, daß er durch die thermische Strahlung einer Akkretionsscheibe zustande kommt, deren Temperatur nach außen abnimmt.

Ein weiteres grundlegendes Argument für die Existenz einer Akkretionscheibe ist die Beobachtung großskaliger, stark kollimierter Gasströmungen, sogenannter Jets, die in den Kernbereichen vieler Galaxien ihren Ursprung zu haben scheinen. Offensichtlich ist also in diesen Kernbereichen eine Achse, nämlich die Jetachse, besonders ausgezeichnet. Es liegt nahe, damit eine rotierende Gasscheibe, die ja ebenfalls eine ausgezeichnete Achse, nämlich die Rotationsachse, hat, in Verbindung zu bringen. So wurden Modelle entwickelt, welche die Entstehung eines Jets auf das Zusammenwirken einer Akkretionsscheibe mit Erzeugung und Verstärkung von Magnetfeldern in derselben zurückführen [Blandford und Payne 1982, Camenzind 1990].

Angespornt durch diese Grundüberlegungen bemüht man sich seitdem, unser Bild von den Vorgängen in Quasaren und anderen Aktiven Galaktischen Kernen zu verfeinern. Dabei kommt naturgemäß dem Vergleich der beobachteten Spektren mit den Modellvorstellungen eine besondere Bedeutung zu. Bisher ist aber die Herkunft vieler spektraler Eigenschaften von Quasaren noch völlig unverstanden. Z.B. zeigen einige Spektren eine besonders starke Variabilität, dabei können Schwankungen im Spektrum innerhalb sehr kurzer Zeiträume festgestellt werden, die über einen weiten Frequenzbereich miteinander korreliert zu sein scheinen [Witzel und Quirrenbach 1990]. Eine weitere Frage betrifft die Natur der breiten Emissionslinien, die in den Spektren von Quasaren und Seyfert-Galaxien anzufinden sind. Bei Seyfert-2-Galaxien lassen sie sich nur im polarisierten Licht nachweisen [Antonucci und Miller 1985], was darauf hindeutet, daß es einen, ebenfalls achsensymmetrischen, Gas oder Staubtorus um das Zentrum gibt, der je nach Orientierung der Galaxie den Kern verdeckt.

Die Emissionslinien entstehen offensichtlich durch ein Gas, das eine Geschwindigkeitsdissipation von einigen 1000km/s aufweisen muß [Netzer 1987]. Zur Erklärung bieten sich eine Vielzahl konkurrierender Modelle an, von denen das Standardmodell davon ausgeht, daß es im Zentralbereich durch Photoionisation zwei stabile Phasen, bei zwei unterschiedlichen Temperaturen, gibt, die zur Bildung turbulent um das Zentrum rotierender, linienemittierender Wolken führen. Letztere können ihren Ursprung aber auch in Sternwinden des zentralen Sternhaufens [Kazanas 1989, Schaaf und Schmutzler 1991] haben, oder durch magnetische sowie strahlungsgetriebene [Shlosman *et al* 1985] Beschleunigung von der Akkretionsscheibe abgestoßen werden. Aber auch eine Erzeugung direkt auf der Akkretionsscheibe ist nicht ausgeschlossen [Collin-Souffrin 1987]. Der Bereich, in dem diese Linien erzeugt werden, wird Broad Line Region (BLR) genannt.

Es ist nun offensichtlich, daß, wenn man all diese spektralen Eigenschaften und die damit verbundenen physikalischen Prozesse, also z.B. die Herkunft der BLR, besser verstehen will, eine genaue Modellvorstellung über die Gasdynamik im inneren Bereich von Quasaren haben muß. Wenn das Standardmodell wirklich stimmt, und eine extrem leuchtstarke Akkretionsscheibe im Zentrum des inneren Bereiches sitzt, deren Signatur bis zu uns deutlich zu sehen ist, steht zu erwarten, daß diese auch einen starken Einfluß auf die Umgebung hat.

Vergleicht man die physikalischen Zustände über einer Akkretionsscheibe mit denen bei Sternen, so stellt man fest, daß Scheiben in AGN vergleichbar sind mit heißen OB-Sternen. Das besondere Merkmal dieser Sterne ist aber, daß sie einen starken strahlungsgetriebenen Wind haben, der einen nicht unerheblichen Bruchteil der Sternmasse ins interstellare Medium transportiert. Die Forderung der Existenz einer Akkretionsscheibe müßte also zwangsläufig die Existenz eines Scheibenwindes nach sich ziehen, mit wichtigen Konsequenzen für die Umgebung der Scheibe, also z.B. die BLR, aber auch für die Scheibe selber, die durch einen Wind einen zusätzlichen Masse- und Drehimpulsverlust erfährt.

Bisherige Modelle haben sich darauf beschränkt, die Umgebung einer Akkretionsscheibe als statische Atmosphäre oder Corona anzunehmen [Czerny und King 1989, Czerny und King 1989, Piran 1977, Liang und Price 1977], bzw. thermische Winde zu berechnen [Fukue 1989, Fukue und Okada 1990]. Diese Rechnungen gelten aber in erster Linie der Situation um Sterne. Bei Quasaren gibt es eine Reihe von Spekulationen über den Einfluß von Magnetfeldern auf die Bildung einer Corona [Heyvaerts 1990]. Auch strahlungsgetriebene AGN Winde wurden schon einmal für einfache Fälle, d.h. Thomsonstreuung und vereinfachte Geometrie, gerechnet. Lediglich [Vitello und Shlosman 1988] haben den Vergleich zu Sternwinden schon einmal gezogen und gerechnet. Aber auch in dieser Arbeit wurden grundsätzliche Eigenschaften von Scheibenwinden, wie z.B. ihre zweidimensionale Struktur, grob vernachlässigt.

Da also einerseits die theoretischen Grundlagen für Scheibenwinde bisher noch sehr unbefriedigend sind, und es sich in den meisten Fällen nur um adaptierte Sternwindmodelle handelt und andererseits die Existenz eines Scheibenwindes ein wichtiges Bindeglied zwischen Scheibe und Quasarumgebung und damit auch ein wichtiger Schlüssel zur Interpretation der Beobachtungen ist, soll es Ziel der vorliegenden Arbeit sein, diese theoretischen Grundlagen herauszuarbeiten. Dabei geht es eher darum ein physikalisches Verständnis der Situation in und über der Scheibe, sowie der Windgleichungen zu bekommen und daraus eine geeignete Methode zur Beschreibung von Scheibenwinden zu entwickeln, als um die Rechnung konkreter Modelle und deren Vergleich mit der Beobachtung. Dies bleibt einer späteren Arbeit vorbehalten.

Wir werden deshalb wie folgt vorgehen: Zunächst werden die Grundgleichungen der Akkretionsscheibentheorie noch einmal aus einfachen physikalischen Argumenten hergeleitet. Dann wird der Strahlungstransport über einer Scheibe unter der Annahme vernachlässigbarer optischer Dicke berechnet. Anhand dieser beiden Überlegungen wird gezeigt, wie das Strahlungsfeld und vor allem der Strahlungsdruck über einer Akkretionsscheibe aussieht und dessen Struktur diskutiert.

Im zweiten Schritt werden die hydrodynamischen Gleichungen auf Stromlinienkoordinaten transformiert, so daß ihre, aus den eindimensionalen Rechnungen bekannte Struktur erhalten bleibt, sie ihren zweidimensionalen Charakter aber nicht verlieren. Anschließend erfolgt eine einfache, aber entscheidende Näherung. Unter der Annahme der Selbstähnlichkeit aller Stromlinien kann ein Scheibenwind in eine Aneinanderreihung quasi eindimensionaler hydrodynamischer Flußröhren entkoppelt werden.

Mit dieser Methode gelingt es dann, einiges über die Eigenschaften und Schwierigkeiten strahlungsgetriebener Scheibenwinde zu lernen. Dabei werden zunächst Winde diskutiert, deren Absorptionskoeffizient alleine durch Thomsonstreuung bestimmt ist, weil deren Struktur noch relativ leicht durchschaubar ist. Danach werden die Windgleichungen, motiviert durch das Vorbild der Sternwinde, um die Absorption in Linien erweitert, was noch einmal eine deutlich Änderung der Struktur bedeutet, da die optische Tiefe der Linien vom Geschwindigkeitsgradienten der Strömung abhängt. Abgeschlossen wird das Ganze von einigen Beispielrechnungen, die mit dem für das gestellte Problem entwickelten Computerprogramm erstellt wurden.

Kapitel 2

Dünne Akkretionsscheiben

2.1 Die Grundgleichungen

Unter einer Akkretionsscheibe stellt man sich eine rotierende, abgeplattete Gasmasse vor, in der Masse durch einen Akkretionsprozeß zum Zentrum transportiert und dort angesammelt wird (Akkretion = Zuwachs).

Im folgenden werden die Grundgleichungen für das Standardmodell dünner, stationärer Akkretionsscheiben elementar hergeleitet. Es geht dabei nicht um eine vollständige, mathematisch korrekte Herleitung, sondern darum, die Grundgedanken der Akkretionsscheibentheorie möglichst allgemeinverständlich darzustellen. Dies ist völlig ausreichend, da im Rahmen dieser Arbeit das Standard-Scheibenmodell als feste Vorgabe für die Windberechnungen benutzt wird und die Rückwirkungen des Windes auf die Struktur der Scheibe erst in weiterführenden Arbeiten behandelt werden. Wir beschränken uns bei der weiteren Betrachtung nun auf die Situation, in der die Scheibe folgenden Bedingungen unterliegt:

- achsensymmetrisch ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$)
- geometrisch dünn (Dicke $<$ 10% des Radius)
- stationär ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- optisch dick (Strahlungstransport)
- Gravitationsfeld wird von zentraler Masse dominiert

Der Einfachheit halber benutzen wir für die Herleitung zunächst die Newtonsche Gravitationstheorie und ergänzen diese am Ende durch relativistische Korrekturen. Dann sind die, dem Problem angepaßten Koordinaten, Zylinderkoordinaten (R, ϕ, Z), wobei die Achse $R = 0$ genau mit der Rotationsachse der Scheibe zusammenfällt und die Scheibe selber in der Äquatorialebene $Z = 0$ liegen soll. *Die Dimensionen werden durch die Masse M des zentralen Objektes skaliert, wir setzen $G = M = c = 1$.* Im weiteren werden deshalb für die physikalischen Größen folgende Einheiten benutzt:

Masse: Die Masse M des zentralen Objekts ist Grundlage und Parameter unseres Maßsystems, dennoch verwenden wir aus Gründen der Übersichtlichkeit gelegentlich eine Massenskala $m_9 = M/10^9 M_\odot = 1.99\ 10^{42}\mathrm{g}$. Da wir für das zentrale Objekt in erster Linie massereiche schwarze Löcher im Zentrum von AGN's im Kopf haben, folgen wir [Laor und Netzer 1989] und benutzen den Skalierungsfaktor $10^9 M_\odot$. Im konkreten Modell wird dann m_9 im Bereich von 10^{-3} für das galaktische Zentrum [Genzel und Townes 1987] bis hin zu 10^2 für etwaige ultramassereiche Zentralobjekte von Galaxien [Bland-Hawthorn *et al* 1991] sein.

Länge: Gravitationsradius $R_g = \dfrac{GM}{c^2} = 1.477\,10^{14}\,m_9 \cdot \mathsf{cm}$. Dieser Radius spielt in der allg. Relativitätstheorie eine große Rolle (2.3.1), bei der Behandlung schwarzer Löcher gibt er eine Größenordnung für deren Horizont ("Radius") an. Bei einem nicht-rotierenden Loch ist z.B. der Schwarzschildradius durch $R_s = 2R_g$ und der letzte stabile Orbit durch $6R_g$ gegeben.

Geschwindigkeit: Lichtgeschwindigkeit $c = 2.9979246\,10^{10}\,\mathsf{s}$. In der Newtonschen Mechanik wäre dies genau die Umlaufgeschwindigkeit für ein gravitativ gebundenes Teilchen auf einer Kreisbahn mit Radius $R = R_g$ um die zentrale Masse.

Zeit: Gravitationszeitskala $t_g = R_g/c = GM/c^3 = 4.9256978\,10^3\,m_9 \cdot \mathsf{s}$

Beschleunigung: Beschleunigungszeitskala $g_g = c/t_g = c^4/GM = 6.0862942\,m_9 \cdot 10^6\,\mathsf{cm/s}$

Drehimpuls: Die Einheit des Drehimpulses $a_{\lim} = McR_g = GM^2/c = 8.805\,10^{66}\,m_9^2 \cdot \mathsf{cm^2 g/s}$ ist gleichzeitig der maximale Drehimpuls eines schwarzen Loches.

Energie: $E_g = MR_g^2/t_g^2 = Mc^2 = 1.7876\,10^{63}\,m_9 \cdot \mathsf{erg}$

Energiefluß: $F_g = M/t_g^3 = c^9/G^3M^2 = 1.6643\,10^{31}\,m_9^2 \cdot \mathsf{erg/s\,cm^2}$

Temperatur: Die Temperatur wird wie gewohnt in Kelvin angegeben.

Soweit es geht werden diese Skalen nun benutzt, um mit dimensionslosen Größen zu rechnen. Wir ersetzen z.B. die Koordinaten durch $r = R/R_g$ und $z = Z/R_g$. Will man am Ende wieder die realen Dimensionen und vor allem die Abhängigkeit von der Zentralmasse haben, braucht man nur mit der entsprechenden Einheit zu multiplizieren.

2.1.1 Viskosität und Drehimpulstransport

Die Frage, welche diesem Abschnitt vorangestellt ist, lautet: Wie bringt man eine rotierende Gasscheibe dazu, Masse zum Zentrum zu transportieren? Denn was der allseits bekannte Wasserstrudel beim Entfernen des Stöpsels in der Badewanne so mühelos bewältigt, ist für eine im Raum rotierende Gasscheibe in einem Zentralkraftfeld ein ernsthaftes Problem — die Erhaltung des Drehimpulses. Damit nämlich eine rotierende Gasmasse überhaupt akkretiert werden kann, muß diese ihren Drehimpuls auf irgendeine Weise loswerden, sonst ist irgendwann die Schwelle erreicht, bei der die Zentrifugalkraft zu groß wird und der Anziehungskraft der zentralen Masse die Waage hält. Die Akkretion wäre gestoppt, noch ehe sie richtig in Fahrt gekommen wäre. *Wenn Masse nach innen transportiert werden soll, muß Drehimpuls nach außen transportiert werden* (siehe dazu [Lynden-Bell und Pringle 1974]). Wenn also eine Akkretionsscheibe existieren soll, muß es gleichzeitig einen effektiven Drehimpulstransportmechanismus geben.

Um dies genauer zu untersuchen, betrachten wir nun jeweils infinitesimale Kreisringe der Breite Δr der Gasscheibe. Nehmen wir zuerst an, daß diese völlig isoliert von den benachbarten Ringen sind, dann rotiert, unter den oben genannten Bedingungen, das Gas auf Keplerbahnen um das zentrale Objekt. D.h. die dimensionslose Winkelgeschwindigkeit ω eines Gasringes beim Radius r ist gegeben durch

$$\omega = r^{-3/2} \tag{2.1}$$

die Tangentialgeschwindigkeit v_ϕ durch

$$v_\phi = \omega r = r^{-1/2} \tag{2.2}$$

und der spezifische Drehimpuls l (Drehimpuls pro Masseneinheit) durch

$$l = rv_\phi = \sqrt{r}. \tag{2.3}$$

Es liegt also keine starre Scheibe mit $v_\phi = \text{const}$ vor, sondern jeder Ring rotiert mit einer differentiell anderen Geschwindigkeit als seine Nachbarn — innen schneller als außen. Der spezifische

Drehimpuls der Ringe nimmt hingegen von innen nach außen zu. Andersherum formuliert bedeutet dies, daß ein Ring, der Drehimpuls verliert, den Drang verspürt, nach innen zu wandern. Eine solche zeitliche Änderung des Drehimpulses ist auch gleichbedeutend mit der Feststellung, daß an dem Ring ein Drehmoment angreift.

Es gibt nun verschiedene Vorschläge, wie ein solches Drehmoment entstehen könnte. Z.B. kann ein geordnetes, großräumiges Magnetfeld, welches wie das Magnetfeld in Spiralgalaxien [Parker 1971, Ruzmaikin *et al* 1988, Krause *et al* 1990] durch den Dynamoeffekt erzeugt werden könnte [Pelletier und Pudritz 1991], mit einer genügend großen Komponente senkrecht zur Scheibe durch einen magnetohydrodynamischen Wind (z.B. Jets) Drehimpuls und Materie davontragen ([Blandford und Payne 1982, Lovelace *et al* 1991, Blandford 1976, Blandford und Znajek 1977, Lovelace 1976, Pudritz *et al* 1991, Pelletier und Pudritz 1990, und Referenzen dort]).

Außer durch das Einwirken eines quasi äußeren Drehmomentes wie bei einem globalen Magnetfeld kann es aber auch in der Scheibe selber zu einem Drehimpulstransport kommen, dann nämlich, wenn in der Scheibe eine nennenswerte Viskosität vorliegt. In diesem Fall "reiben" die einzelnen Ringe aneinander, der differentiell schnellere Ring wird durch seinen langsameren Nachbarn abgebremst und es kommt zum Austausch von Drehimpuls. Dieser wird so von innen nach außen, also von einem Ring zum nächsten, weiter gereicht werden, was sich auch über simple Energieargumente zeigen läßt. Denn die Einführung einer Viskosität erzwingt gleichzeitig auch die Einführung einer Energiedissipation, weil beim Absinken der Materie im Potentialtopf des zentralen Objektes die gewonnene Energie nur zur Hälfte in kinetische Energie umgewandelt werden kann (Virialsatz) und die andere Hälfte auf andere Weise umgesetzt werden muß[1]. Man kann aber nun leicht beweisen [Lynden-Bell und Pringle 1974, S.604], daß der Zustand niedrigster Energie einer Scheibe, der mit starrer Rotation ($\omega = \mathrm{const}, v_\phi \propto r, l \propto r^2$) ist und das Vorhandensein einer Dissipation dazu führt, daß eine Scheibe diesem Zustand zustrebt, was wiederum impliziert (2.1-2.3), daß die Scheibe einem Zustand zustrebt, der in den äußeren Bereichen mehr und in den inneren Bereichen weniger Drehimpuls erfordert.

Es stellt sich nun die Frage nach der Natur dieser Viskosität. Schon [Weizsäcker 1948] hat argumentiert, daß molekulare Reibung nicht der Grund dafür sein kann, da diese im astrophysikalischen Kontext um Größenordungen zu klein ist, stattdessen muß es eine andere Form der "Reibung" geben. Dabei können turbulente Magnetfelder eine Rolle spielen [Heyvaerts 1990, Tagger *et al* 1990], es kann sich aber auch um spiralartige Schockwellen handeln [Michel 1984, Sawada *et al* 1986, Spruit 1987], die entstehen, wenn durch eine axialsymmetrische Störung Wellen am inneren oder äußeren Rand der Scheibe entstehen, nach außen bzw. innen laufen und dann dissipieren [Spruit 1991].

Der Prozeß, mit dem man allerdings ursprünglich den Begriff kinematische Viskosität verband, ist die Turbulenz. Aus Laborexperimenten und aus theoretischen Überlegungen [Zahn 1990] weiß man inzwischen, daß in einer gescherten Strömung, wie sie eine differentiell rotiernde Scheibe darstellt, Turbulenzen entstehen, die durch Instabilitäten [Glatzel 1991] angeregt werden. Es entsteht eine Kolmogorov-Kaskade [Kolmogorov 1942] mit Wirbeln von der größten bis zu allerkleinsten Skala, wo es dann möglich ist, durch viskose Reibung die Energie zu dissipieren. Der gleiche Prozeß ist im Prinzip auch in der Lage Drehimpuls zu transportieren. Womit nicht gesagt ist, daß sowohl für Energiedissipation als auch für den Drehimpulstransport jeweils derselbe Effekt verantwortlich sein muß. Es kann gut sein, daß z.B. die Energie durch Wirbel dissipiert und der Drehimpuls durch Schockwellen transportiert wird [Zahn 1990].

Für die Herleitung der Grundgleichungen benutzen wir jetzt aber das einfache, klassische Bild der Viskosität durch turbulente Wirbel, wobei man einschränkend sagen muß, daß es sich dabei, wegen der Unsicherheiten bei der Beschreibung der Turbulenz, nur um grobe Verallgemeinerungen handeln kann.

[1] Bei der Berücksichtigung allgemeinrelativistischer Effekte ändert sich dieses Verhältnis

2.1.2 Drehhimpulstransport durch Turbulenz — Die Kopplung zwischen Scheibenringen

Wir betrachten wieder einen differentiellen Kreisring der Scheibe mit der Breite Δr im Abstand r und der Fläche

$$\Delta A_{\circledcirc} = 2\pi r \, \Delta r \tag{2.4}$$

sowie einer Flächendichte Σ, ausgedrückt durch die Massendichte ρ

$$\Sigma(r) = \int_0^{z_0} \rho(r,z)\, dz \approx \rho z_0 \tag{2.5}$$

bzw. wenn man die endliche Dicke z_0 der Scheibe nicht berücksichtigt

$$\Sigma(r) = \frac{Masse}{Fl\ddot{a}che} = \frac{\Delta m}{\Delta A_{\circledcirc}} = \frac{\Delta m}{2\pi r\, \Delta r}. \tag{2.6}$$

Drehimpuls Der (differentielle) Drehimpuls L eines Ringes ist

$$\Delta L = r v_\phi \, \Delta m\,, \tag{2.7}$$

was mit der Annahme von Keplerrotation (2.2) für einen differentiellen Kreisring (2.6) bedeutet, daß

$$\Delta L = 2\pi \, \Delta r \, \Sigma(r) r^{3/2}. \tag{2.8}$$

Drehimpulstransport Wie oben beschrieben üben die zwei benachbarten Ringe durch turbulente Reibung ein Drehmoment G aufeinander aus. Angenommen, an der Grenze zwischen zwei Ringen entstehen Wirbel mit einer Größenskala l_T und mit turbulenten Geschwindigkeiten v_T. Dann fließt ständig Masse vom einen Ring in den anderen. Da es sich um einen chaotischen Prozeß handelt, wird im Mittel dadurch kein Massenfluß entstehen. Der Drehimpuls ist aber abhängig vom Radius. Wird nämlich ein rotierendes Teilchen mit Impuls $p(r)$ z.B. durch einen Wirbel von r radial nach $r + l_T$ transportiert, ändert sich der Drehimpuls von $r\,p(r)$ nach $(r + l_T)p(r)$ (siehe dazu [Frank *et al* 1985, S. 64]). Durch den turbulenten Massentransport entsteht also in der Scheibenebene ein Drehimpulsfluß (2D: Drehimpuls pro Zeit und Länge) über die Grenze zwischen den beiden Ringen hinweg. Die Differenz zwischen dem Drehimpulstransport von innen nach außen und umgekehrt beträgt dann

$$\Delta L = L_{io} - L_{oi}, \tag{2.9}$$

wobei L_{io} der Drehimpuls des Teilchens ist, das vom inneren in den äußeren Ring gelangt und L_{oi} vice versa.

$$L_{io} = m\,(l_T + r)\, v_\phi(r) \tag{2.10}$$

$$L_{oi} = m r v_\phi(l_T + r) \tag{2.11}$$

Durch die Winkelgeschwindigkeit (2.2) ausgedrückt ist

$$v_\phi(r) = r\omega(r) \tag{2.12}$$

$$v_\phi(l_T + r) = (l_T + r)\,\omega(l_T + r) \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow \Delta L = mr\,(l_T + r)\,(\omega(r) - \omega(l_T + r))\,. \tag{2.14}$$

Turbulenz Die Zeitskala des Flusses ist durch eine typische Turbulenzgeschwindigkeit v_T und eine typische Turbulenzlänge l_T festgelegt

$$\Delta t = \frac{l_T}{v_T}. \tag{2.15}$$

Die in die Turbulenz verwickelte Materie liegt in einem Streifen der Breite l_T um die Grenzlinie der Länge $2\pi r$ zwischen den beiden Ringen. Deren Masse ergibt sich dann einfach aus der Oberflächendichte

$$m = 2\pi l_T r \Sigma(r) \tag{2.16}$$

Drehmoment Die Gleichungen für den Drehimpulsfluß (2.14) und die Turbulenz (2.15, 2.16) kann man nun verbinden und das an die Ringe angreifende Drehmoment bestimmen.

$$\Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = 2\pi\,(l_T + r)\,v_T \Sigma(r) r^2\,(\omega(r) - \omega(l_T + r)) \tag{2.17}$$

Die Größe eines Wirbels ist nach oben ungefähr durch die Dicke der Scheibe begrenzt, welche bei der Annahme einer dünnen Scheibe klein gegenüber dem Radius ist. Also kann man davon ausgehen, daß sich ω auf einer Längenskala l_T nur langsam ändert und

$$\frac{\omega(r) - \omega(l_T + r)}{l_T} = -\frac{d\omega(r)}{dr} \tag{2.18}$$

setzen, sowie

$$l_T + r \approx r \tag{2.19}$$

annehmen und es folgt

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = -2\pi l_T v_T \Sigma(r) r^3 \frac{d\omega(r)}{dr}. \tag{2.20}$$

Das Produkt $l_T v_T$ in (2.20) faßt man nun zusammen und definiert als turbulente Viskosität

$$\nu = l_T v_T \tag{2.21}$$

mit der Dimension Fläche pro Zeit[2]. Darüberhinaus sollte man sich daran erinnern, daß die Änderung des Drehimpulses mit der Zeit gleich einem Drehmoment ist. Wir können also die linke Seite von (2.20) auch schreiben als

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = -G, \tag{2.22}$$

wobei G jetzt das Drehmoment ist, welches der äußere Ring auf den inneren ausübt (Vorzeichen).

$$\Rightarrow G = 2\pi\nu\Sigma(r) r^3 \frac{d\omega(r)}{dr} \tag{2.23}$$

Darüberhinaus definieren wir noch noch die Scherrate σ_ϕ

$$\sigma_\phi = \frac{1}{2} r\,\frac{d\omega(r)}{dr}, \tag{2.24}$$

so daß 2.25 geschrieben wird als

$$G = 4\pi r^2 \sigma_\phi \nu \Sigma(r). \tag{2.25}$$

Durch diese Gleichung hat man ein Maß für die Kopplung zweier benachbarter Scheibenringe durch "turbulente Reibung" angegeben, mit der man die weiteren Scheibengleichungen herleiten kann. Es ist aber wieder daran zu erinnern, daß Gl. 2.21 nur ein ad hoc Ansatz ist. Über den genauen Ablauf turbulenter Vorgänge hat man bis heute keine detaillierten Vorstellungen, geschweige denn eine quantitative Beschreibung.

Dissipationsenergie Wir wollen nun sehen, inwieweit der oben geschilderte Prozeß auch zur Beschreibung der Energieerzeugung benutzt werden kann. Betrachteten wir deshalb nun die Kraft, die zwei benachbarte Ringe an ihrer Grenzfläche aufeinander ausüben. Sie ergibt sich aus dem Drehmoment zu G/r und wird längs des Umfanges $2\pi r$ ausgeübt, also verbraucht man durch die Reibung der Ringe aneinander irreversibel eine Energie von $\Delta E = 2\pi G$, wenn diese gegeneinander bewegt werden. Definieren wir deshalb als Dissipationsrate D_0 die Energie, die pro Zeit und Fläche auf diese Weise umgesetzt wird:

[2] In der kinematischen Gastheorie wird ν oft als $\frac{1}{3} l v$ definiert.

$$D_0 = \frac{\Delta E}{\Delta A \ \Delta t} \tag{2.26}$$

In unserem Fall ist die Fläche $\Delta A = 4\pi r \Delta r$, da ein Ring ja zwei Seiten hat, die Zeitskala der differentiellen Rotation ist durch die Winkelgeschwindigkeit $\Delta t = 2\pi/\Delta\omega$ gegeben und das Drehmoment durch (2.25).

$$D_0 = \frac{G\,\Delta\omega}{4\pi r\,\Delta r}. \tag{2.27}$$

Wir können das auch schreiben als

$$D_0 = \frac{G\sigma_\phi}{2\pi r^2} = T_\phi \sigma_\phi, \tag{2.28}$$

indem wir T_ϕ als die integrierte Scherkaft bezeichnen, wobei $T_\phi = G/2\pi r^2 = 2\int_0^{z_0} t_\phi \, dz$ ist. t_ϕ wird Scherkraft oder auch viskoser Druck (Kraft/Grenzfläche der Ringe) genannt.

$$\Rightarrow D_0 = 2\nu\Sigma(r){\sigma_\phi}^2 \tag{2.29}$$

Die Dissipationsrate einer Akkretionsscheibe ist also direkt proportional zur Viskosität, zur Oberflächendichte und zum Quadrat der Scherrate.

2.1.3 Die Erhaltungssätze

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, daß durch Turbulenz eine Kopplung zwischen benachbarten Ringen erfolgt und so ein Drehimpulstransport möglich ist. Wir haben gezeigt, daß Hand in Hand mit diesem Vorgang auch eine Dissipation von Energie verbunden ist. Folglich ist ein radialer Massefluß mit einer Geschwindigkeit v_r zwingend, weil die benötigte Energie erst durch das Herabsinken im Potentialtopf freigesetzt wird. Im weiteren wollen wir jetzt die radiale Struktur dieser Scheibe bestimmen und benutzen dazu die Erhaltungssätze von Drehimpuls, Masse und Energie.

Massenerhaltung In den Vorbedingungen hatten wir eine stationäre Scheibe gefordert, was gleichbedeutend mit der Forderung eines radial konstanten Massenflusses ist, wenn nicht die Masse auf eine andere Weise verschwinden kann (z.B. Wind). Anderenfalls würde sich im Laufe der Zeit die Flächendichte an jedem Radius ändern. Also lautet unsere Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m} = \frac{-2\pi r\,\Delta r\,\Sigma(r)}{\Delta t} = -2\pi r v_r \Sigma(r) = const, \tag{2.30}$$

wobei wir $\dot{m}$ als Akkretionsrate definieren, so daß $\dot{m} > 0$ wenn $v_r < 0$.

Drehimpulserhaltung Betrachten wir jetzt zusätzlich zur Masse noch den Drehimpuls. Die Änderung desselben soll nach unseren Voraussetzungen alleine dadurch zustande kommen, daß ein Drehimpulstransport von einem inneren Ring zu seinem äußeren Nachbarn stattfindet und das im gleichen Maße, wie umgekehrt die Masse vom äußeren in den inneren Ring fließt. Wir haben ja schon oben gezeigt, daß Drehimpulstransport und Massefluß in unserem Konzept wie Siamesische Zwillinge unabdingbar miteinander verknüpft sind. Also schreiben wir ausgehend von (2.7)

$$\dot{L} = r v_\phi \dot{m}. \tag{2.31}$$

Wie wir nicht erst aus dem vorangegangenen Abschnitt wissen, ist der Drehimpulstransport über die Drehimpulserhaltung auch mit dem anliegenden Drehmoment verknüpft (2.22). Da wir jetzt aber nicht nur einen isolierten Ring betrachten, sondern die gesamte radiale Struktur der Scheibe, müssen wir zusätzlich noch die Randbedingungen der Scheibe berücksichtigen. Schließlich gehen wir davon aus, daß im Zentrum ein irgendwie gearteter Abfluß sitzt, an dem die Scheibe endet. Hierbei müssen wir eine Angabe über den Drehimpulstransport am innersten

Ring machen, der ja über einen ganz anderen Mechanismus mit dem zentralen Objekt gekoppelt ist. Wir berücksichtigen das in unserer Bilanz durch ein zusätzliches Drehmoment C des zentralen Objektes.

$$\dot{L} = C - G \tag{2.32}$$

Mit den üblichen Ersetzungen (2.6, 2.2) und der Gleichung für die Akkretionsrate und den Drehimpulstransport (2.30, 2.31) erhalten wir dann aus (2.32)

$$2\pi r \Sigma(r) v_r r^2 \omega = G - C. \tag{2.33}$$

2.1.4 Die Struktur bei Keplerrotation

Bis zu diesem Punkt ist noch keine explizite Annahme über den radialen Verlauf der Winkelgeschwindigkeit eingegangen, was aber gleich nachgeholt werden soll. In den Vorraussetzungen haben wir das Gravitationspotential auf das eines zentralen Objektes reduziert. Gehen wir nun noch davon aus, daß wir eine wirkliche Scheibe haben, in der $v_r \ll v_\phi$ ist, dann liegen wir mit der Annahme, daß sich das Scheibenmaterial nahezu auf Keplerorbits bewegt, sicher nicht völlig falsch und können (2.2) verwenden. Folglich ist es für uns auch kein Problem mehr die Scherrate (2.24) auszurechnen

$$\sigma_\phi = -\frac{3}{4}\omega. \tag{2.34}$$

Zusätzlich sollten wir uns noch über die Randbedingung und insbesondere den Wert von C Gedanken machen. Die einfachste Annahme ist dabei, daß an einem bestimmten inneren Abschneideradius r_{in} die Scheibe endet und die Grenzschicht sehr klein gegenüber dem Scheibenradius ist. So können wir das Problem des Drehimpulstransportes getrost dem zentralen Objekt überlassen und verlangen lediglich, daß unser zentrales Objekt am Abschneideradius mit der akkretierten Masse auch deren übriggebliebenen Drehimpuls übernimmt, also $C = \dot{L}_{in} = r_{in} v_\phi(r_{in})\dot{m}$ bzw. bei Keplerrotation

$$C = \sqrt{r_{in}}\dot{m}. \tag{2.35}$$

Es wird damit impliziert, daß mit den Teilchen auch deren noch vorhandene kinetische Energie am innersten Rand der Scheibe verschwindet.

Radialer Verlauf der Dissipationsenergie Nach getaner Arbeit kommt nun der Lohn unserer Mühen. Aus der Kopplung der Scheibenringe (2.25), der Drehimpulsgleichung (2.33) und den obigen Annahmen (2.2, 2.34, 2.35) erhalten wir einen Ausdruck für das Produkt aus Oberflächendichte und Viskosität,

$$\nu\Sigma(r) = \frac{\dot{m}}{3\pi}\left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right) \tag{2.36}$$

welcher es uns erlaubt, die Dissipationsrate (2.29) explizit als Funktion des Radius und der Akkretionsrate anzugeben

$$D_0 = \frac{3\dot{m}}{8\pi r^3}\left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right). \tag{2.37}$$

Damit haben wir der Akkretionsscheibe die wichtigste Information schon entlockt und könnten mit der Annahme, daß die gesamte dissipierte Energie lokal als Schwarzkörperstrahlung wieder abgestrahlt wird, schon ein erstes Spektrum berechnen (§3.4, S.48). Es ist zu beachten, daß dieses dann *nicht* von der Viskosität abhängt, sondern nur von der Akkretionsrate und selbstverständlich der realen Skala des Systems, also der Masse des Zentralobjektes.

Was wir sofort berechnen können, ist die gesamte Leuchtkraft L [erg/s], die von der Scheibe zwischen zwei Radien (r_1, r_2) abgestrahlt wird, indem wir die Dissipationsrate über beide Scheibenoberflächen integrieren.

$$L(r_1, r_1) = 2 \int_{r_1}^{r_2} D_0(r)\, 2\, \pi\, r\, dr \;= \frac{3}{2} \dot{m} \left(\frac{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{r_{in}}{r_1}}}{r_1} - \frac{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{r_{in}}{r_2}}}{r_2} \right) \tag{2.38}$$

Im Grenzwert einer unendlich ausgedehnten Scheibe ergibt sich, mit den noch zu definierenden skalierten Größen aus (§2.3.2, S.22), die Gesamtleuchtkraft der Akkretionsscheibe.

$$L(r_{in}, \infty) = \frac{\dot{m}}{2\, r_{in}} = 1.8\, 10^{47} \frac{\dot{m}_0\, m_9}{(r_{in}/6)} \left[\frac{\mathsf{erg}}{\mathsf{s}}\right] \tag{2.39}$$

Der Faktor 1/2 bedeutet, daß nur die halbe potentielle Energie in Strahlung umgewandelt wird, die andere Hälfte der Energie steckt, wie oben erwähnt, noch in der Bewegungsenergie der Teilchen am Rand. Nimmt man nicht an, daß die Scheibe am inneren Rand einfach abgeschnitten wird, sondern die Teilchen in einer Randschicht abgemremst werden, dann würde in dieser Randschicht eine Leuchtkraft freigesetzt, die maximal der der gesamten Scheibe entspricht [?].

2.2 Vertikale Struktur und lokale Gleichungen

Im folgenden entkoppeln wir die radialen (r) von den vertikalen (z) Gleichungen, indem wir annehmen, daß die radialen Gradienten sehr viel kleiner sind als die vertikalen, so daß wir lokal die vertikalen Gleichungen isoliert betrachten können. Diese Näherung ist eine gute, für den Großteil der Scheibe, wir aber ungültig am inneren Rande der Scheibe.

Die Scheibendicke Als nächstes interessiert uns jetzt, wie dick unsere Scheibe eigentlich ist, und ob es sich dabei wirklich um eine dünne Scheibe handelt oder eher um einen dicken Torus, bei dem unsere Beschränkung der Betrachtung auf die Äquatorialebene unangebracht gewesen wäre.

In unserem Standardbild wird die Dicke unserer Scheibe allein durch das hydrostatische Gleichgewicht von Druck P und Gravitation g^{grav} bestimmt, die z-Komponente der Eulergleichung (§4.2.1, S.62) lautet dann

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = g_z^{grav}. \tag{2.40}$$

Die vertikale Komponente der Gravitationsbeschleunigung einer Punktmasse ist für den Fall $z \ll r$ (dimensionslos, also ohne den Faktor GM)

$$g_z^{grav} = \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{z}{r^3}. \tag{2.41}$$

Wir haben nun zwei Möglichkeiten, den Druck darzustellen, zum einen für ein optisch dickes Medium explizit durch die Summe aus Strahlungsdruck P_r und Gasdruck P_g

$$P = \frac{k_B \rho}{m_p \mu_m} T + \frac{4\sigma}{3c} T^4, \tag{2.42}$$

wobei wir den vertikalen Temperaturverlauf nicht berücksichtigen und mit T immer die Zentraltemperatur meinen, und zum anderen durch eine Proportionalität zur Dichte, indem wir eine Schallgeschwindigkeit unter Vernachlässigung des Adiabatenindexes so definieren, daß

$$P = \rho {c_s}^2. \tag{2.43}$$

Mittels des Druckgleichgewichts (2.40) und den Angaben für Druck (2.43) und Gravitationsbeschleunigung (2.41) definieren wir jetzt eine Skalenhöhe $z = z_0$ für den Gleichgewichtszustand der Scheibe, an der $\partial/\partial z \rightarrow z_0$. Dies liefert uns eine einfache Beziehung zwischen Skalenhöhe und Schallgeschwindigkeit einer Scheibe.

$$z_0 = c_s r^{3/2} = \frac{c_s}{\omega} \tag{2.44}$$

2.2.1 Die "Unwissenheit" ist eine Zahl - Der α Parameter

Was uns jetzt noch fehlt, sind Informationen über den Temperatur- und Dichteverlauf der Scheibe. Dabei stört uns aber die unbekannte Viskosität ν und deren radialer Verlauf, denn (2.36) gibt uns nur einen Ausdruck für das Produkt $\nu\Sigma$. D.h. bei einer festen Akkretionsrate liefert eine Konfiguration mit niedriger Oberflächendichte und hoher Viskosität das selbe Ergebnis wie die mit hoher Oberflächendichte und niedriger Viskosität.

Zu Hilfe kommt uns eine einfache Parametrisierung, mit der [Shakura und Sunyaev 1973] in einer grundlegenden Arbeit das Problem der Turbulenz entschärft haben. Sie überlegten sich, daß die turbulenten Wirbel in ihrer Größe und ihrer Geschwindigkeit in natürlicher Weise nach oben hin bergrenzt sind, und zwar respektive durch die Dicke der Scheibe z_0 und die Schallgeschwindigkeit des Gases c_s. Für $l_T > z_0$ können nur 2-dimensionale Wirbel entstehen, die aber zur Energiedissipation kaum beitragen [Zahn 1990] und für $v_T > c_s$ entstehen Schocks, die solche Wirbel wegdämpfen sollten. Wir skalieren also die Viskosität und schreiben mit einem zusätzlichen Faktor 3/2, den wir aus Kompatibilitätsgründen einführen

$$\nu = \frac{2}{3} c_s z_0 \left(\frac{3 l_T v_T}{2 c_s z_0} \right) = \frac{2}{3} \alpha c_s z_0, \tag{2.45}$$

wobei uns der Parameter $\alpha = \frac{3 l_T v_T}{2 c_s z_0}$ angibt, wieweit unser reales System von der Maximalkonfiguration entfernt ist. Dies setzten wir in (2.36) ein und erhalten unter Verwendung von (2.44)

$$\Sigma = \frac{\dot{m}}{2\pi\alpha {c_s}^2 r^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}} \right). \tag{2.46}$$

Es ist keinesfalls klar, das α bei jedem Radius gleich ist, dennoch wird in der einfachen Theorie, sozusagen in nullter Näherung, dieser Parameter als eine Konstante angesehen. Wir werden sehen, daß die astronomischen Meßgrößen nur schwach von α abhängen, so daß es nur darauf ankommt, die Größenordnung von α zu bestimmen, was aber auch schon schwer genug sein wird.

Bevor wir uns aber darum kümmern, noch ein Wort zur Interpretation von α, da dieser Parameter oft auf eine andere Art und Weise eingeführt wird, als wir es getan haben. Wir betrachten deshalb wieder die Kopplung (2.25), setzen aber jetzt schon den expliziten Ausdruck für die Scherrate (2.34) und den α-Parameter ein. Außerdem nutzen wir das Verhältnis zwischen Winkelgeschwindigkeit und Skalenhöhe (2.44) und teilen die Gleichung zu guter Letzt noch durch $2\pi r^2$.

$$-\frac{G}{2\pi r^2} = \alpha \Sigma(r) {c_s}^2 \tag{2.47}$$

Wenn wir im Bild der Reibung durch kinematische (turbulente) Viskosität bleiben, dann steht auf der linken Seite der Gleichung die Kraft pro Umfang eines Scheibenringes mit welcher der innere Ring gegen den äußeren "gepreßt" wird — die wir als integrierte Scherkraft (2.28) bezeichnet haben — und auf der rechten Seite die integrierte Dichte (2.5) (α = const und c_s = const). Die Gleichheit der Integranden liefert uns so unter Verwendung von (2.43) eine Beziehung zwischen der Scherkraft und dem Druck in der Scheibe.

$$t_\phi = \alpha P \tag{2.48}$$

Die Einführung von α ist also äquivalent mit dem Ansatz, daß der viskose Druck proportional zum Druck in der Scheibe ist.

Man könnte sich nun noch streiten, welcher Druck mit P gemeint ist, entweder der gesamte Druck $P = P_g + P_r$, eventuell noch ergänzt vom Druck durch Magnetfelder und hochenergetische Teilchen, oder nur der Gasdruck P_g. Aus der Herleitung für (2.47) sehen wir, daß sich c_s^2 aus zwei Beiträgen zusammensetzt. Ein c_s folgt aus (2.44), bzw. dem Gleichgewicht zwischen Gravitation und Druckgradient. Hier ist also auf jeden Fall der gesamte Druck gemeint. Der zweite Beitrag ist hingegen eine direkte Folge der Viskosität und wir könnten darüber diskutieren, ob die dort als obere Grenze verwandte Schallgeschwindigkeit wirklich die geeignete Geschwindigkeitsskala ist. Bei reiner Turbulenz erscheint dies sehr plausibel, kann sich aber ändern, wenn ein anderer Drehimpulstransportmechanismus wichtig wird.

Energietransport Welche Temperatur hat das Gas in der Scheibe? Diese Frage soll uns jetzt beschäftigen. Zur Bestimmung der Temperatur unserer Scheibe könnten wir zwar aus der Dissipationsenergie eine effektive Temperatur ableiten, aber wer sagt uns, daß es sich dabei um die wirkliche Gastemperatur handelt? Wir dürfen nämlich die, wenn auch geringe, Dicke der Scheibe nicht vergessen. Wenn die Energie im Zentralbereich der Scheibe bei $z = 0$ erzeugt wird, dann gibt es einen vertikalen Energietransport, der zu einem Temperaturgradienten führt und im allgemeinen entweder durch Strahlung oder Konvektion [Bisnovatyi-Kogan und Blinnikov 1977] zustande kommt. Letztere spielt vor allem bei niedrigen Zentralmassen (Sternen) mit ausgedehnten äußeren Bereichen eine große Rolle und kann in einen Zusammenhang mit der turbulenten Viskosität gebracht werden [Duschl 1989]. Da uns aber in erster Linie nur der innere Bereich massereicherer Scheiben interessiert, vernachlässigen wir diesen Aspekt und widmen uns allein dem vertikalen Strahlungstransport in der Scheibe.

Die Zentraltemperatur $T = T|_{(z=0)}$ der Scheibe wird dann durch eine Relation zwischen vertikalem Energiefluß und der Energieerzeugung durch viskose Dissipation beschrieben. In einem optisch dicken, nicht konvektiven Medium, wie wir es für unsere Scheibe jetzt einfach fordern wollen, reduziert sich der Strahlungstransport in der Diffusions-Näherung auf eine einfache Form [Mihalas 1978, Kap. 2-5 u. 2-2]. Dabei setzt man sich an eine Stelle in der Scheibe, wo die otpische Tiefe $\tau \gg 1$ ist und ein lokales thermisches Gleichgewicht (LTE) herrscht. Dann entwickelt man die Quellfunktion in Planckfunktionen (B_ν) um τ und kann wegen $d^n B_\nu / d\tau^2 \approx B_\nu / \tau^n$ und $1/\tau^2 \ll 1/\tau$ schon nach der ersten Ordnung abbrechen. Diese Entwicklung setzt man dann in die Strahlungstransportgleichung ein und bekommt dann für den Strahlungsfluß[3] F_ν mit $\rho\kappa dz = d\tau$

$$F_\nu = \frac{4\pi}{3}\frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial z} \tag{2.49}$$

Jetzt integrieren wir über die Frequenz (d.h. $F_\nu \rightarrow F$ und $\int_0^\infty B_\nu \, d\nu = \sigma/\pi T^4$ (Zentraltemperatur), $\kappa_\nu \rightarrow \kappa$ Rosseland mean) und ersetzten $\partial/\partial z$ durch die reziproke Skalenhöhe $1/z_0$ der Scheibe

$$F = \frac{4\sigma T^4}{3\kappa\rho z_0}. \tag{2.50}$$

Wir fordern Energieerhaltung in dem Sinne, daß die gesamte erzeugte Energie auch wieder abgestrahlt wird, andernfalls würde sich die Scheibe immer weiter aufheizen, oder wir müßten einen zusätzlichen Energieverlustprozeß postulieren. Das tun wir nicht, sondern setzen $D_0 = F$ (2.37, 2.50) und ersetzen die Dichte durch die Flächendichte (2.5)

$$\sigma T^4 = \frac{9\kappa\Sigma\dot{m}}{32\pi r^3}\left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right). \tag{2.51}$$

2.2.2 Modelle für Scheiben

Opazität Wenn man sich über die konkrete Situation in Scheiben Gedanken macht, taucht als erstes die Frage nach der geeigneten Form der Opazität κ auf. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier nur auf zwei Prozesse, nämlich Elektronen-Streuung ($\kappa_{es} = 0.4\,\mathrm{g/cm^2}$)

[3] Definition der Begriffe im nächsten Kapitel

und frei-frei Absorption ($\kappa_{ff} = 0.34\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}\left[\frac{n}{10^{-11}\mathrm{cm}^{-3}}\right]\left[\frac{T}{10^3\mathrm{K}}\right]^{-7/2}$, obwohl eigentlich eine differenziertere Betrachtung nötig wäre [Laor und Netzer 1989].

Mit dieser Einschränkung im Hinterkopf und unserem Wissen über den radialen Verlauf der Dissipationenergie (2.37) können wir nun die Scheibe in zwei Regionen unterteilen und zwar abhängig von der Temperatur, die mit der höchsten Potenz eingeht. In einem inneren, heißeren Bereich, wird wohl die konstante Opazität der Elektronen-Streuung dominieren, wohingegen weiter außen die Temperatur so weit abgefallen sein wird, daß dort frei-frei Absorption überwiegt.

Außerdem kann es Bereiche in der Scheibe geben, wo der Strahlungsdruck über den Gasdruck dominiert und umgekehrt. Wir beschränken uns bei der Betrachtung aber zunächst auf die beiden extremen Regionen, wobei von denen nicht gesagt ist, daß sie beide in jeder Scheibe existieren müssen. Quasar-Scheiben bestehen meistens nur aus dem inneren Bereich, während Stern-Scheiben hauptsächlich aus dem äußeren Bereich bestehen.

Innere (heiße) Region

Für den inneren Bereich setzen wir

$$\kappa = 0.4\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{g}}\frac{M}{{R_g}^2} \tag{2.52}$$

Die isotherme Schallgeschwindigkeit ist über das Verhältnis zwischen Druck und Dichte definiert (2.43). Wir nehmen an, daß der Strahlungsdruck dominiert und P_{gas} in (2.42) vernachlässigbar ist. Wir erhalten somit die Schallgeschwindigkeit als Funktion der Oberflächendichte (2.5) und der Temperatur.

$${c_s}^2 = \frac{4\sigma z_0 T^4}{3\Sigma c} \tag{2.53}$$

Kombinieren wir nun (2.53, 2.51, 2.46, 2.44), um den radialen Verlauf der Schallgeschwindigkeit in Erfahrung zu bringen.

$$c_s = \frac{3\kappa\dot{m}}{8\pi c r^{3/2}}\left(1-\sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right) \tag{2.54}$$

Dadurch erhalten wir sofort die Scheibenhöhe aus (2.44)

$$z_0 = \frac{3\kappa\dot{m}}{8\pi c}\left(1-\sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right). \tag{2.55}$$

Die Oberflächendichte folgt aus (2.1),

$$\Sigma = \frac{32\pi c^2 r^{3/2}}{9\alpha\kappa\dot{m}}\left(1-\sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right)^{-1} \tag{2.56}$$

die Dichte mit der Näherung (2.5),

$$\rho = \frac{256 c^3 r^{3/2}\pi^2}{27\alpha\kappa^3\dot{m}^2}\left(1-\frac{\sqrt{r_{in}}}{\sqrt{r}}\right)^{-1} \tag{2.57}$$

die Radialgeschwindigkeit v_r folgt aus der Massenerhaltung (2.30)

$$v_r = -\frac{9\alpha}{64}\left(\frac{\kappa\dot{m}}{\pi c}\right)^2 r^{-\frac{5}{2}}\left(1-\sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right) \tag{2.58}$$

und schließlich erhalten wir noch die Temperatur aus (2.51).

$$T = \sqrt{c}\,(\alpha\kappa\sigma)^{-\frac{1}{4}}\, r^{-\frac{3}{8}} \tag{2.59}$$

Äußere (kalte) Region

Im äußeren Bereich nehmen wir an, daß die Temperatur so weit abgefallen ist, daß die Opazität alleine durch frei-frei-Absorption angenähert werden kann ($x_\kappa = 6.6\,10^{22}\,\mathsf{K}^{\frac{7}{2}}\mathsf{cm}^5/\mathsf{g}^2 \cdot M^2/R_g{}^5$)

$$\kappa = x_\kappa \rho T^{-\frac{7}{2}} \tag{2.60}$$

und der Druck vom Gasdruck dominiert wird ($P_{rad} = 0$). Analog zu (2.53) folgt dann für die Schallgeschwindigkeit

$$c_s = \sqrt{\frac{T k_B}{m_p \mu_m}}. \tag{2.61}$$

(2.51, 2.60, 2.5, 2.44, 2.61, 2.46) liefern uns die Schallgeschwindigkeit,

$$c_s = \left(\frac{9 x_\kappa \dot{m}^3}{128\pi^3 \alpha\sigma}\right)^{\frac{1}{20}} \left(\frac{k_b}{m_p \mu_m}\right)^{\frac{3}{8}} r^{-\frac{3}{8}} \left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right)^{\frac{3}{20}} \tag{2.62}$$

woraus sich wie oben die Standard-Lösungen für eine Akkretionsscheibe ergeben[4]

$$z_0 = \alpha^{-\frac{1}{10}} \left(\frac{k_B}{m_p \mu_m}\right)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{9 x_\kappa}{128\sigma}\right)^{\frac{1}{20}} \left(\frac{\dot{m}}{\pi}\right)^{\frac{3}{20}} r^{\frac{9}{8}} \left(1 - \frac{\sqrt{r_{in}}}{\sqrt{r}}\right)^{\frac{3}{20}} \tag{2.63}$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{m_p \mu_m}{k_B}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{128\sigma \dot{m}^7}{9\alpha^8 x_\kappa \pi^7}\right)^{\frac{1}{10}} r^{-\frac{3}{4}} \left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right)^{\frac{7}{10}} \tag{2.64}$$

$$\rho = 2^{\frac{1}{20}} \alpha^{-\frac{7}{10}} \left(\frac{\dot{m}}{\pi}\right)^{\frac{11}{20}} \left(\frac{m_p \mu_m}{k_B}\right)^{\frac{9}{8}} \left(\frac{\sigma}{9 x_\kappa}\right)^{\frac{3}{20}} r^{-\frac{15}{8}} \left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right)^{\frac{11}{20}} \tag{2.65}$$

$$v_r = -\alpha^{\frac{4}{5}} \left(\frac{k_B}{m_p \mu_m}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{9 x_\kappa}{128\sigma}\right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{\dot{m}}{\pi}\right)^{\frac{3}{10}} r^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{\sqrt{r_{in}}}{\sqrt{r}}\right)^{-\frac{7}{10}} \tag{2.66}$$

$$T = \alpha^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{\dot{m}}{\pi}\right)^{\frac{3}{10}} \left(\frac{m_p \mu_m}{k_B}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{9 x_\kappa}{128\sigma}\right)^{\frac{1}{10}} r^{-\frac{3}{4}} \left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}}\right)^{\frac{3}{10}}. \tag{2.67}$$

2.3 Relativistische Korrekturen

Nachdem wir die Theorie der Akkretionsscheiben in ihren Grundzügen verstanden haben, können wir es wagen, einen Blick auf die allgemeinrelativistischen Korrekturen derselben zu werfen. Wie schon erwähnt, soll unser Hauptaugenmerk auf die Behandlung massereicher Quasarscheiben gerichtet sein, bei denen, so die gängige Annahme, das zentrale Objekt ein supermassereiches schwarzes Loch ist. Die Scheibe wird dann unter Umständen ganz bis an den Ereignishorizont heranreichen, so daß der größte Teil der abgestrahlten Energie aus einem Bereich kommt, wo nicht mehr die Newtonsche Mechanik gilt, sondern allgemein relativistische Effekte dominieren.

[Novikov und Thorne 1973, Page und Thorne 1974] haben die Scheibengleichungen um diese relativistischen Korrekturen erweitert. Es hat sich gezeigt, daß sich diese durch relativ einfache algebraische Faktoren ausdrücken lassen. Die oben aufgezeigte Logik der Herleitung der Scheibengleichungen behält dann ihre Struktur. Daher ist es nicht nötig, die wichtigen Gleichungen nocheinmal herzuleiten, sondern es werden nur die Ergebnisse angeben.

[4] Vgl. [Frank *et al* 1985, Gl. (5.45)]. Dort ist allerdings der Korrekturfaktor falsch angegeben. Man muß $f \to f^{\frac{1}{4}}$ ersetzen (siehe auch S.85). Die leichten Unterschiede der Vorfaktoren beim Einsetzen der Zahlenwerte kommen durch Rundung zustande und sind, da wir schon mit der Größenordnung zufrieden sind, unerheblich.

2.3.1 Rotierende schwarze Löcher

Nehmen wir an, daß unser schwarzes Loch ein Loch im sprichwörtlichen Sinne ist, in das die akkretierte Masse hineinspiraliert. Entwicklung des schwarzen Loches und Akkretionsprozeß sind dann miteinander gekoppelt. Es ist sehr gut vorstellbar, daß der mit einströmende Drehimpuls dazu führt, das schwarze Loch in Rotation zu versetzen, aber auch andere Prozesse wie z.B. die Wechselwirkung mit einem zentralen Sternhaufen kann zu einem schwarzen Loch mit Drehimpuls führen. (Zur Entwicklung schwarzer Löcher siehe [Thorne 1974, Okamoto und Kaburaki 1990, Dokuchaev 1990, Dokuchaev 1989]). Auch von der Beobachtungsseite gibt es Hinweise, die für eine starke Rotation des schwarzen Loches sprechen [?]. Die Beschreibung solcher Objekte gelingt unter Verwendung der Kerr-Metrik [Kerr 1963, Bardeen 1970], wobei es für unsere Belange reicht, nur direkte kreisförmige Orbits in der Äquatorialebene zu betrachten [Bardeen *et al* 1972, Novikov und Thorne 1973, Bardeen 1973, Page und Thorne 1974]. Bei allen weiteren Betrachtungen dürfen wir nicht vergessen, daß die Koordinaten der Kerr-Metrik eigentlich Boyer-Lindquist Koordinaten sind, die erst im Newtonschen Grenzfall in die bekannten Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten übergehen.

Drehimpuls des schwarzen Loches Die entscheidenden Parameter eines rotierenden schwarzen Loches sind dessen Masse m und Drehimpuls a. In dem von uns gewählten Einheitensystem entspricht a gleichzeitig dem spezifischen Drehimpuls, mit der Folge, daß $-1 \leq a \leq 1$ (Vorzeichen s.u.) sein muß, anderenfalls wäre die Kausalität verletzt [Lightman *et al* 1975, S. 470].[5] Ein schwarzes Loch mit $a = 1$ wird ein extremes Kerr-Loch genannt, bei normaler Akkretion kann dieser theoretische Wert nicht erreicht werden, da die von der Scheibe im inneren Bereich emittierte Strahlung selber einen entgegengesetzten Drehimpuls hat, der vom schwarzen Loch absorbiert wird. Im Grenzprozeß kann daher nur ein maximaler Drehimpuls von $a_{\max} \approx 0.998$ erreicht werden [Thorne 1974].

Marginal stabiler Radius Bisher nahmen wir an, daß unsere Scheibe bis an den Rand des zentralen Objektes reicht. Aber was bedeutet das bei einem schwarzen Loch? Diese haben nämlich mehrere "Ränder", und zwar vom Mittelpunkt aus in der Reihenfolge[6]: Ereignishorizont, letzter Photonenorbit, letzter gebundener Orbit, und einen Radius, ab dem alle Orbits aufgrund von "Spin-Bahn-Kopplungen" instabil werden — der marginal stabile Radius r_{ms}, welchen wir als inneren Rand der Scheibe ansehen wollen. Er ist für $\operatorname{sgn} a = \pm 1$ wie folgt definiert

$$r_{ms} = 3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)} \tag{2.68}$$

S

$$Z_1 = 1 + \left((1-a)^{\frac{1}{3}} + (1+a)^{\frac{1}{3}}\right)\left(1 - a^2\right)^{\frac{1}{3}} \tag{2.69}$$

$$Z_2 = \sqrt{{Z_1}^2 + 3a^2}. \tag{2.70}$$

Unter einem "negativem Drehimpuls" wollen wir hier verstehen, daß die Rotationsachse des schwarzen Loches und des orbitierenden Teilchens genau entgegengesetzt orientiert sind. Ein Teilchen, das in derselben Richtung wie das schwarze Loch rotiert, kommt näher ($a = 1 \Rightarrow r_{ms} = 1$) an das Zentrum heran, als ein entgegengesetzt rotierendes Teilchen ($a = -1 \Rightarrow r_{ms} = 9$). Ein nicht-rotierendes schwarzes Loch macht dahingegen natürlich keine Unterschiede ($a = 0 \Rightarrow r_{ms} = 6$), der letzte stabile Orbit liegt genau bei drei Schwarzschildradien, wohingegen der Ereignishorizont bei einem Schwarzschildradius liegt. Schließlich und endlich schauen wir uns noch den marginal stabilen Radius für ein schwarzes Loch mit $a_{\max} = 0.998$ an, dort ist $r_{ms} = 1.23697$ und wir sehen, daß, obwohl der Drehimpuls fast 1 ist, ein deutlicher Unterschied zu dem Fall $a = 1$ besteht.

[5] Aus dem gleichen Grund kann man zum Beispiel zeigen, daß das bisher noch als punktförmig angesehene Elektron kein schwarzes Loch sein kann.

[6] Bei $a = 1$ liegen alle diese Orbits bei $r = 1$, wegen der eigentümlichen Definition von r in Boyer-Lindquist Koordinaten, gibt es zwischen ihnen aber trotzdem noch einen endlichen Abstand [Bardeen 1973]

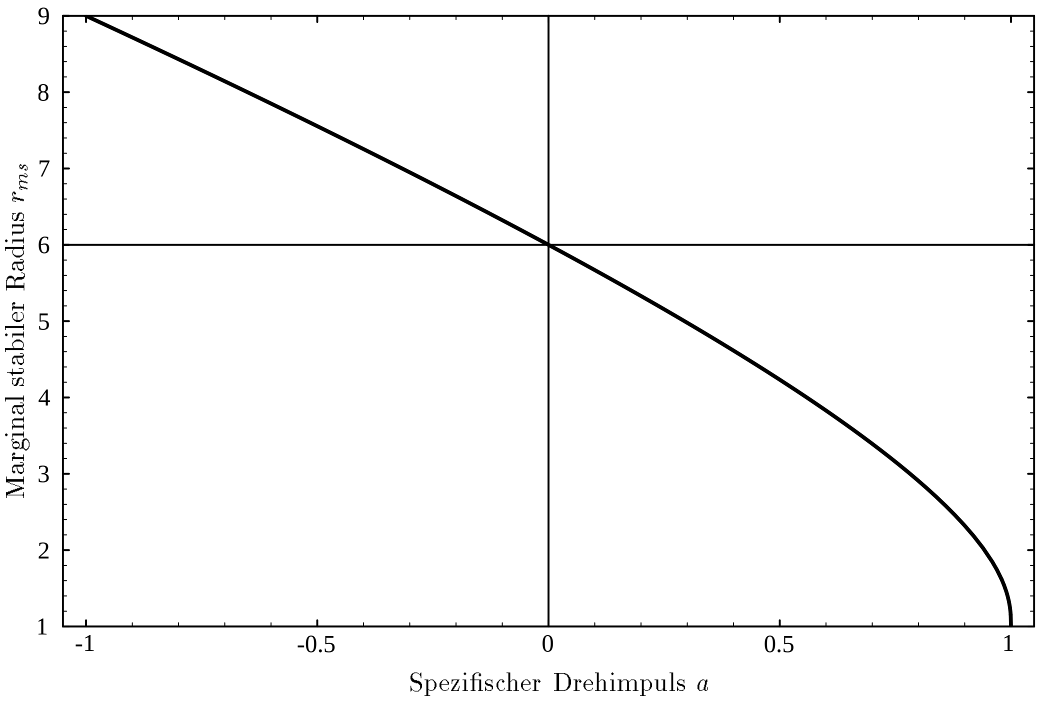

Abbildung 2.1: Marginal stabiler Radius (innerster Rand) für eine rotierende Scheibe um ein schwarzes Loch (2.68), als Funktion des spezifischen Drehimpulses eines Kerr-Loches. Negativer Drehimpuls bedeutet retrograde Orbits.

Korrekturfaktoren Wir definieren jetzt die oben schon erwähnten Korrekturfaktoren, wie sie in [Novikov und Thorne 1973, Page und Thorne 1974] eingeführt wurden, um sie nachher zu benutzen.

$$\mathcal{A} = 1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{2a^2}{r^3} \tag{2.71}$$

$$\mathcal{B} = 1 + \frac{a}{r^{\frac{3}{2}}} \tag{2.72}$$

$$\mathcal{C} = 1 - \frac{3}{r} + \frac{2a}{r^{\frac{3}{2}}} \tag{2.73}$$

$$\mathcal{D} = 1 - \frac{2}{r} + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \tag{2.74}$$

$$\mathcal{E} = 1 + 4\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{4a^2}{r^3} \tag{2.75}$$

$$\mathcal{F} = 1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{2a}{r^{\frac{3}{2}}} \tag{2.76}$$

$$\mathcal{G} = 1 - \frac{2}{r} + \frac{a}{r^{\frac{3}{2}}} \tag{2.77}$$

$$\mathcal{Q} \quad = \quad \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{C}r}}\left(-\frac{3}{2}a \ln\left(\sqrt{\frac{r}{r_{ms}}}\right) + \sqrt{r} - \sqrt{r_{ms}}\right.$$

$$\left. - \frac{3 \ln \frac{-2\cos\tilde{a}_\pi^- + \sqrt{r}}{-2\cos\tilde{a}_\pi^- + \sqrt{r_{ms}}} \left(-a + 2\cos\tilde{a}_\pi^-\right)^2}{2\cos\tilde{a}_\pi^- \left(2\cos\tilde{a}_\pi^- - 2\cos\tilde{a}_\pi^+\right)\left(2\cos\tilde{a}_\pi^- + 2\cos\frac{\tilde{a}}{}\right)} - \frac{3 \ln \frac{-2\cos\tilde{a}_\pi^+ + \sqrt{r}}{-2\cos\tilde{a}_\pi^+ + \sqrt{r_{ms}}} \left(-a + 2\cos\tilde{a}_\pi^+\right)^2}{2\cos\tilde{a}_\pi^+ \left(-2\cos\tilde{a}_\pi^- + 2\cos\tilde{a}_\pi^+\right)\left(2\cos\tilde{a}_\pi^+ + 2\cos\frac{\tilde{a}}{}\right)} + \frac{3 \ln \frac{2\cos\frac{\tilde{a}}{} + \sqrt{r}}{2\cos\frac{\tilde{a}}{3} + \sqrt{r_{ms}}} \left(-a - 2\cos\frac{\tilde{a}}{3}\right)^2}{2\left(-2\cos\tilde{a}_\pi^- - 2\cos\frac{\tilde{a}}{3}\right)\left(-2\cos\tilde{a}_\pi^+ - 2\cos\frac{\tilde{a}}{3}\right)\cos\frac{\tilde{a}}{3}} \right) \tag{2.78}$$

$$\lim_{a\to 0} \mathcal{Q} = \left(\sqrt{r} - \sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{r/3}+1}{\sqrt{2}+1} - \ln\frac{\sqrt{r/3}-1}{\sqrt{2}-1}\right)\right)\frac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{C}r}} \tag{2.79}$$

$$\lim_{a\to 1} \mathcal{Q} = \left(\sqrt{r} - 1 + \frac{3}{2}\left(\ln\frac{2+\sqrt{r}}{3} - \ln\sqrt{r}\right)\right)\frac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{C}r}} \tag{2.80}$$

Die Faktoren $\mathcal{A} - \mathcal{G}$ stammen von [Novikov und Thorne 1973], $\mathcal{Q}$ ist [Page und Thorne 1974] entnommen, wobei die Ersetzungen $\tilde{a} = \arccos a, \tilde{a}_\pi^+ = 1/3(\tilde{a} + \pi)$ und $\tilde{a}_\pi^- = 1/3(\tilde{a} - \pi)$ vorgenommen wurde. Im Newtonschen Grenzfall ($r \to \infty$) gehen sie alle gegen 1.

Orbits in der Äquatorialebene

Wie oben schon angekündigt wollen wir uns jetzt Keplerbewegungen in der Äquatorialebene ($z = 0$) um ein rotierendes schwarzes Loch anschauen. Die bekannten Größen aus der Newtonschen Theorie haben dann für Teilchen auf kreisförmigen Orbits die im folgenden angegebene Form.

Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = r^{-3/2}\frac{1}{\mathcal{B}} \tag{2.81}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist wirklich $\dot{\phi}$ und nicht einfach v_ϕ/r, wie man an der nächsten Formel sieht. Auch hier spielt die Definition der Koordinaten in der Relativitätstheorie eine große Rolle.

Tangentialgeschwindigkeit:

$$v_\phi = r^{-1/2}\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{B}\sqrt{\mathcal{D}}} \tag{2.82}$$

Die Tangentialgeschwindigkeit erreicht also niemals, wie es in der Newtonschen Theorie bei $r = 1$ der Fall wäre, die Lichtgeschwindigkeit, sondern maximal etwa 60% davon.

Scherrate:

$$\sigma_\phi = -\frac{3}{4}\omega\frac{\mathcal{B}\mathcal{D}}{\mathcal{C}} \tag{2.83}$$

Spezifischer Drehimpuls:

$$l = \sqrt{r}\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{C}}} \tag{2.84}$$

Wir sehen, daß wir im Newtonschen Grenzfall, wo die Korrekturfaktoren gegen 1 gehen, genau die uns wohlvertrauten Gleichungen haben.

Erhaltungssätze und radiale Struktur

Auf die gleiche Weise wie oben müssen auch die Erhaltungssätze um die entsprechenden Korrekturfaktoren ergänzt werden.

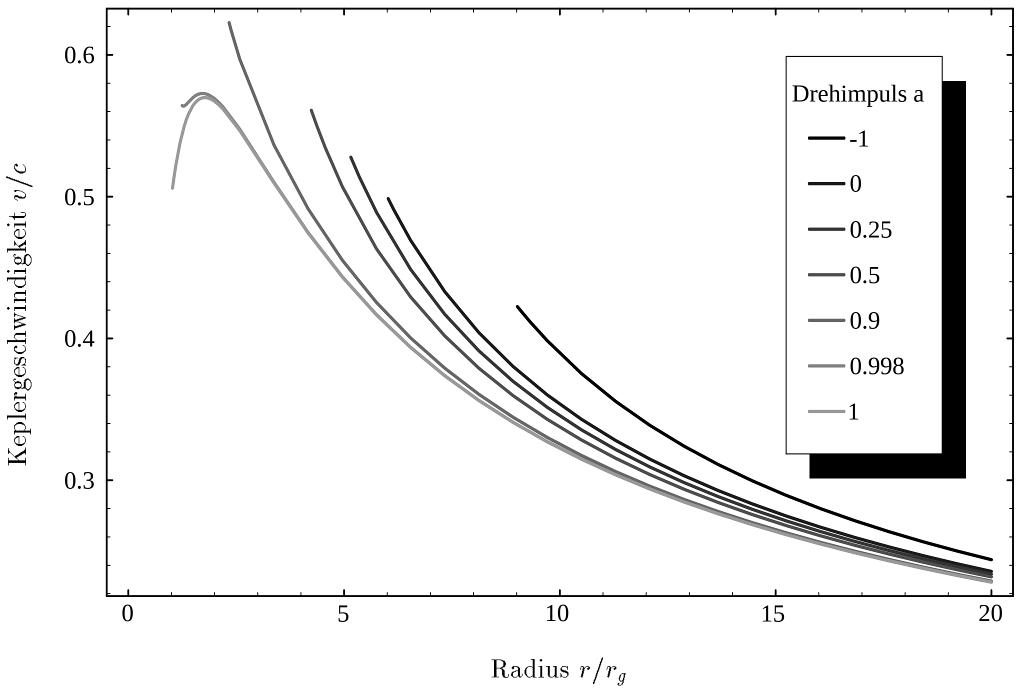

Abbildung 2.2: Keplergeschwindigkeit in der Äquatorialebene eines Kerr-Loches bei verschiedenen spezifischen Drehimpulsen a=(-1,0,0.25,0.5,0.9,0.998,1)

Massenerhaltung:

$$\dot{m} = -2\pi\Sigma r v_r \sqrt{\mathcal{D}} \tag{2.85}$$

Drehimpulserhaltung:

$$0 = 2D_0 l + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(T_\phi r^2 \frac{\mathcal{B}\mathcal{D}}{\sqrt{\mathcal{C}}}\right) + \Sigma v_r \sqrt{\mathcal{D}}\frac{\partial l}{\partial r} \tag{2.86}$$

Schon bekannt sind uns in dieser Gleichung der zweite und dritte Term, die einfach das Verhältnis zwischen Drehimpulsgewinn beim radialen Einfall und Drehimpulstransport durch Scherkräfte beschreiben. Hinzugekommen ist aber noch ein Term, der offensichtlich abhängig ist von der Dissipationsrate in der Scheibe. Dabei wird der von den Photonen weggetragene Drehimpuls mitberücksichtigt.

Energieerhaltung: Analog zu (2.28), ist

$$D_0 = \sigma_\phi T_\phi. \tag{2.87}$$

Dissipationsrate: Anwendung der Erhaltungssätze liefert

$$D_0 = \frac{3\dot{m}}{8\pi r^3}\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{B}\sqrt{\mathcal{C}}}. \tag{2.88}$$

Die gesamte Leuchtkraft ergibt sich wie in (2.38) auch im relativistischen Fall wieder durch Integration der Dissipationsrate $L(r_1, r_2) = 2\int_{r_1}^{r_2} D_0 2\pi r dr$. Für ein Schwarzschild-Loch ($a = 0, r_{in} = 6$) lautet das Integral

$$L(r_1, r_2) = \frac{3}{2}\,\dot{m}\int_{r_1}^{r_2} \frac{-1 + \sqrt{r} + \frac{3\,\ln\frac{2+\sqrt{r}}{3}}{2} - \frac{3\,\ln\sqrt{r}}{2}}{\left(1 - \frac{3}{r}\right)\, r^{\frac{5}{2}}}. \tag{2.89}$$

In Abb.2.3 ist die akkumulierte Leuchtkraft $L(r_{in} = 6, r)$ für verschiedene Radien aufgetragen, und man sieht sofort, daß schon im innersten Bereich bis ungefähr 30 Gravitationsradien die Hälfte der gesamten Leuchtkraft freigesetzt wird, was die Bedeutung dieses Bereiches und der Lage des innersten Radius unterstreicht.

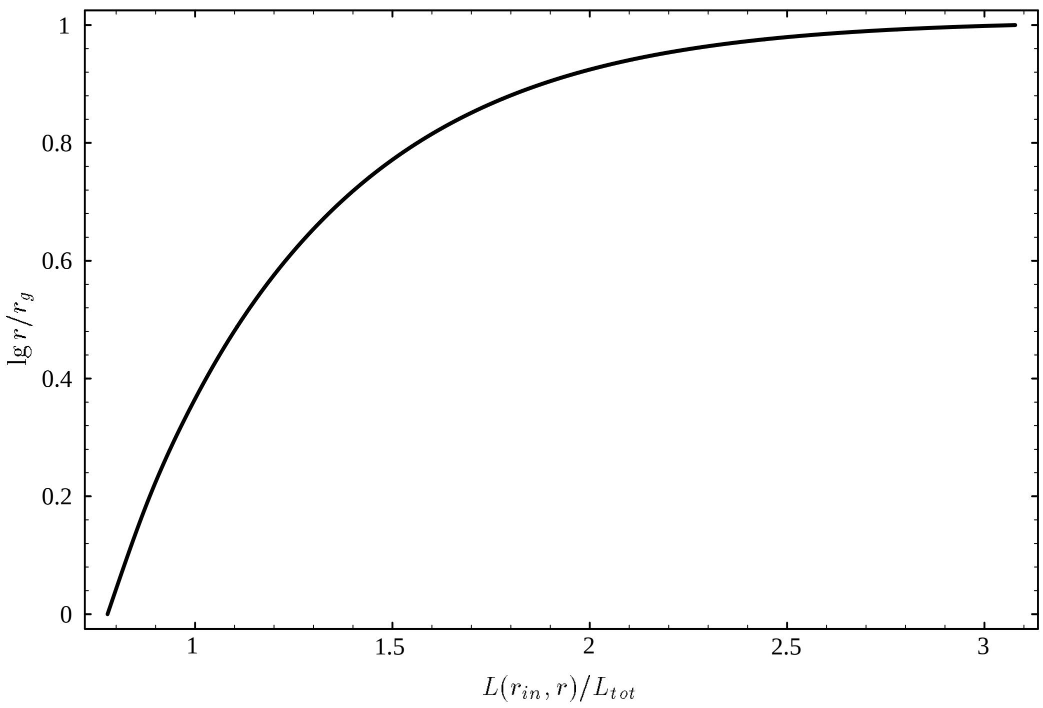

Abbildung 2.3: Akkumulierte Leuchtkraft (2.89) für eine Akkretionsscheibe um ein Schwarzschild Loch im Bereich von $r_{in} = 6$ bis r, normiert auf die gesamte Leuchtkraft der Scheibe.

Vertikale Gravitationsbeschleunigung: Sie ist in der Nähe der Äquatorialebene

$$g_z^{grav} = \frac{z}{r^3}\frac{\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{B}^2}{\mathcal{A}^2\mathcal{C}} \tag{2.90}$$

Skalenhöhe: Egibt sich aus dem Druckgleichgewicht (2.40) und (2.90)

$$z_0 = c_s r^{\frac{3}{2}}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}\mathcal{E}}} = \frac{c_s}{\omega}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}^2}\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}\mathcal{E}}} \tag{2.91}$$

Oberflächendichte: Folgt aus dem α Ansatz $T_\phi = \alpha\Sigma c_s^2$, analog zu (2.46)

$$\Sigma = \frac{\dot{m}}{2\pi\alpha {c_s}^2 r^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathcal{Q}\sqrt{\mathcal{C}}}{\mathcal{B}\mathcal{D}} \tag{2.92}$$

2.3.2 Relativistisches Scheibenmodell

Wenn wir jetzt konkrete Aussagen über Akkretionsscheiben mit relativistischer Korrektur machen wollen, dann brauchen wir dank der Korrekturfaktoren nur die bisherigen Grundgleichungen durch die geänderten Gleichungen (2.81-2.90) zu ersetzen, und entsprechend dem Verfahren, das wir für nichtrelativistische Scheiben hergeleitet haben, umformen.

Die Ergebnisse werden in zwei Darstellungen aufgeführt, zuerst die Gleichungen in Reinform und dann in einer kompakten Form, in der die Konstanten ausgewertet und die Korrekturfaktoren durch ein Symbol $f_x^{i/o}$ repräsentiert werden. Zusätzlich sind Masse und Massefluß noch geeignet normiert.

$$\dot{m} = 38.8\,\dot{m}_0\,m_9 \frac{\mathsf{M}_\odot}{\mathsf{yr}} \tag{2.93}$$

$$M = m_9\,10^9\,\mathsf{M}_\odot \tag{2.94}$$

Der Normierungsfaktor $\dot{M}_{edd} = 38.8 m_9\,\mathsf{M}_\odot/\mathsf{yr}$ entspricht dabei der maximalen Akkretionsrate (entsprechend einer Eddington Luminosität) eines nicht-rotierenden schwarzen Loches, bei maximaler Rotation muß dieser Wert allerdings um den Faktor 5 kleiner sein [Thorne 1974, Laor und Netzer 1989], da die Effizienz $\eta = 1 - \sqrt{1 - 2/(3r_{ms})}$, mit der ein rotierendes schwarzes Loch die akkretierte Masse in Energie konvertiert ($\eta \approx 30\%$) viel größer ist, als die eines Schwarzschild Loches ($\eta \approx 6\%$). Der übliche Wert für die Eddington Luminosität für reinen Wasserstoff und Kugelsymmetrie ist $L_{edd} = 1.25\,10^{47} m_9 \mathsf{erg/s}$ und einer daraus resultierenden Akkretionsrate $\dot{M}_{edd}$ mit der Definition $L_{edd} = \eta \dot{M}_{edd} c^2 \Rightarrow \dot{M}_{edd} = 2.22\,(m_9/\eta) \cdot \mathsf{M}_\odot/\mathsf{yr}$. Für $\eta = 0.0572$ folgt der oben benutzte Normierungsfaktor. Die Gesamtleuchtkraft ist dann $L = \dot{m}_0 L_{edd}$ für ein nicht rotierendes, und $L = 5.66 \dot{m}_0 L_{edd}$ für ein maximal-rotierendes schwarzes Loch.

Zunächst geben wir nun noch einmal die Dissipationsrate, deren funktionaler Zusammenhang schon bekannt und unabhängig von der α-Parametrisierung ist, mit den neuen Skalierungsfaktoren an

$$D_0 = 1.2\,10^{19} \frac{\dot{m}_0}{m_9\,r^3} \frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{B}\sqrt{\mathcal{C}}} \left[\frac{\mathsf{erg}}{\mathsf{s\,cm^2}}\right] \qquad \leftrightarrow \qquad T_{\mathit{eff}} = 6.79\,10^5 \left(\frac{\dot{m}_0}{m_9\,r^3} \frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{B}\sqrt{\mathcal{C}}}\right)^{\frac{1}{4}} [\mathsf{K}] \tag{2.95}$$

und dann die weiteren Gleichungen für die zwei Bereiche der Akkretionsscheibe. Wenn die Einheiten nicht in eckigen Klammern angegeben sind, dann sind die anfänglich eingeführten Gravitationseinheiten (hier: Gravitationsradius und Lichtgeschwindigkeit) zu verwenden.

Innere Region mit relativistischen Korrekturen

Es sei, wie in (§2.2.2, S.15) $\kappa = \kappa_{es}$ und $P = P_r$, so daß c_s weiterhin durch (2.53) gegeben ist, dann folgt

$$c_s = \frac{3\kappa\dot{m}}{8\pi c r^{\frac{3}{2}}} \frac{\mathcal{A}\mathcal{Q}}{\mathcal{B}^2\sqrt{\mathcal{D}\mathcal{E}}} = \frac{26.4\,\dot{m}_0}{r^{\frac{3}{2}}} f^i_{c_s} \tag{2.96}$$

$$z_0 = \frac{3\kappa\dot{m}}{8\pi c} \frac{\mathcal{A}^2\sqrt{\mathcal{C}}\mathcal{Q}}{\mathcal{B}^3\mathcal{D}\mathcal{E}} = 26.4 \dot{m}_0\, f^i_{z_0} \tag{2.97}$$

$$\Sigma = \frac{32\pi c^2 r^{\frac{3}{2}}}{9\alpha\kappa^2\dot{m}} \frac{\mathcal{E}\mathcal{B}^3\sqrt{\mathcal{C}}}{\mathcal{A}^2\mathcal{Q}} = \frac{7.6\,10^{22} r^{\frac{3}{2}}}{\alpha\dot{m}_0} f^i_\Sigma \left[\frac{m_p}{\mathsf{cm^2}}\right] \tag{2.98}$$

$$\rho = \frac{256\pi^2 c^3 r^{\frac{3}{2}}}{27\alpha\kappa^3\dot{m}^2} \frac{\mathcal{B}^6\mathcal{D}\mathcal{E}}{\mathcal{A}^4\mathcal{Q}^2} = \frac{1.9\,10^7 r^{\frac{3}{2}}}{\alpha\dot{m}_0^2 m_9} f^i_\rho \left[\frac{m_p}{\mathsf{cm^3}}\right] \tag{2.99}$$

$$v_r = -\frac{9\alpha\kappa^2\dot{m}}{64\pi^2 c^2 r^{\frac{5}{2}}} \frac{\mathcal{A}^2\mathcal{Q}}{\mathcal{B}^3\sqrt{\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{E}}} = -\frac{696\alpha\dot{m}_0^2}{r^{\frac{5}{2}}} f^i_{v_r} \tag{2.100}$$

$$T = \frac{\sqrt{c}}{(\alpha\kappa\sigma)^{\frac{1}{4}}\,r^{\frac{3}{8}}} \frac{\sqrt{\mathcal{B}}\mathcal{E}^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\mathcal{A}}} = \frac{3.0\,10^5}{\alpha^{\frac{1}{4}} m_9{}^{\frac{1}{4}} r^{\frac{3}{8}}} f^i_T\ [\mathsf{K}] \tag{2.101}$$

Die Temperatur ist in diesem Fall übrigens nicht von der Akkretionsrate abhängig.

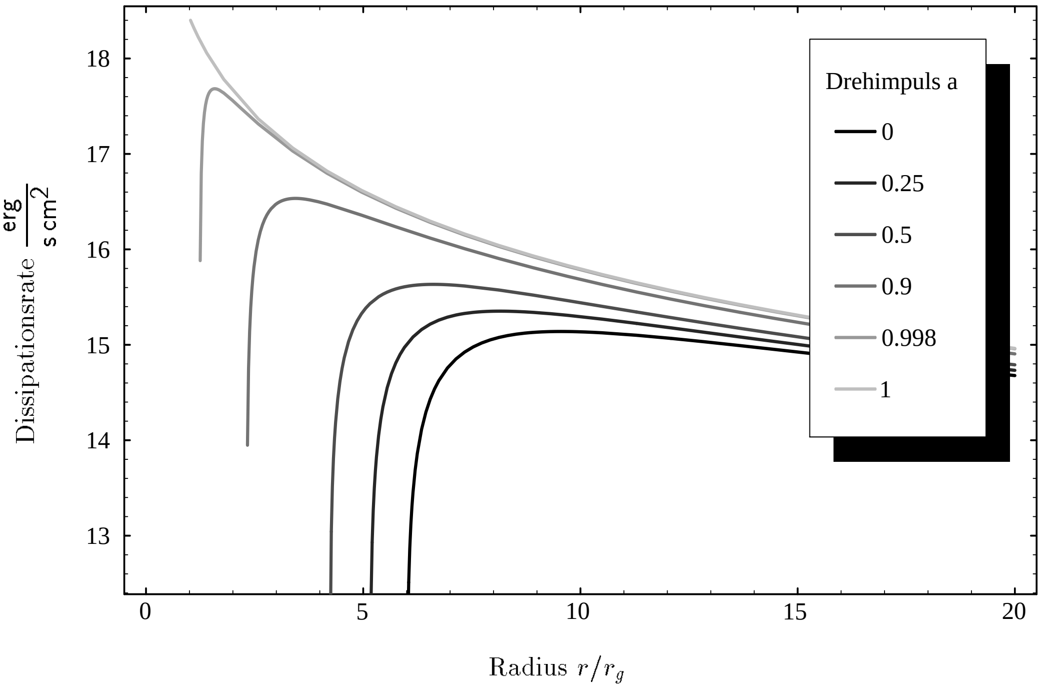

Abbildung 2.4: Dissipationsrate einer stationären Akkretionsscheibe um ein Kerr-Loch bei verschiedenen spezifischen Drehimpulsen a=(0, 0.25, 0.5, 0.9, 0.998, 1) und $\dot{m}_0/m_9 = 1$.

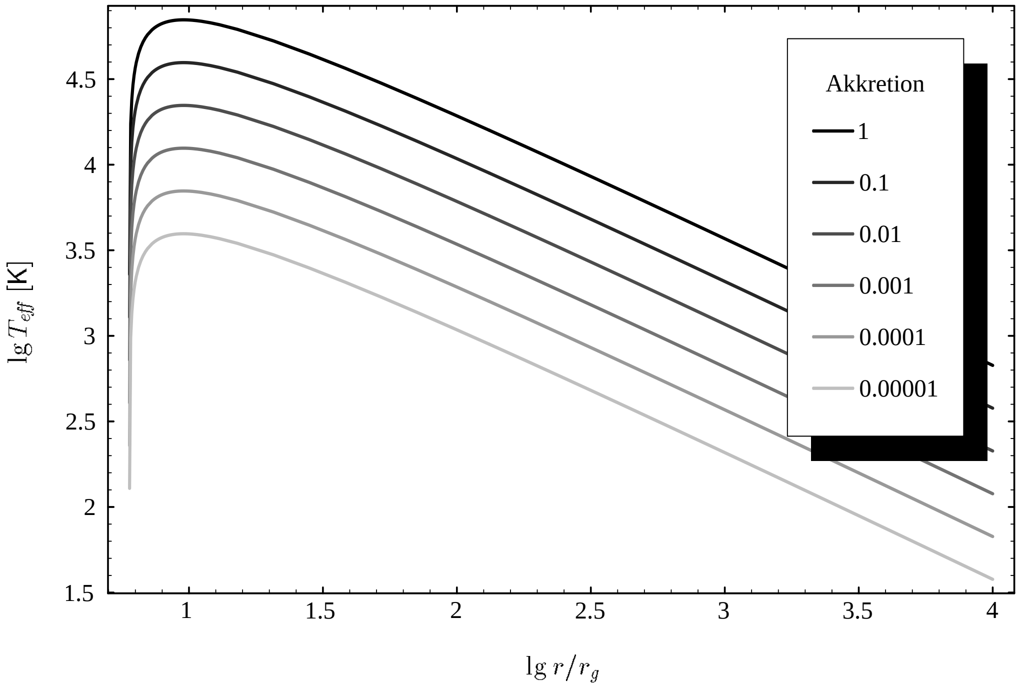

Abbildung 2.5: Effektivtemperatur einer stationären Akkretionsscheibe um ein Schwarzschild Loch bei verschiedenen Werten von $\dot{m}_0/m_9$=(1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001).

Äußere Region mit relativistischen Korrekturen

Nun sei, wie in (§2.2.2, S.16) $\kappa = \kappa_{ff}$ und $P = P_g$, so daß c_s durch (2.61) gegeben ist, dann folgt

$$c_s = \left(\frac{9x_\kappa \dot{m}^3}{128\pi^3\alpha\sigma}\right)^{\frac{1}{20}} \left(\frac{k_b}{m_p\mu_m}\right)^{\frac{3}{8}} r^{-\frac{3}{8}} \frac{\mathcal{E}^{\frac{1}{40}}\mathcal{Q}^{\frac{3}{20}}}{\mathcal{A}^{\frac{1}{20}}\mathcal{B}^{\frac{1}{10}}\mathcal{D}^{\frac{3}{40}}} = \frac{7.91\,10^{-4}\dot{m}_0^{\frac{3}{20}}}{\alpha^{\frac{1}{10}} m_9{}^{\frac{1}{10}} \mu_m{}^{\frac{3}{8}} r^{\frac{3}{8}}} f^o_{c_s} \tag{2.102}$$

$$z_0 = \alpha^{-\frac{1}{10}} \left(\frac{k_B}{m_p\mu_m}\right)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{9x_\kappa}{128\sigma}\right)^{\frac{1}{20}} \left(\frac{\dot{m}}{\pi}\right)^{\frac{3}{20}} r^{\frac{9}{8}} \frac{\mathcal{A}^{\frac{19}{20}}\sqrt{\mathcal{C}}\,\mathcal{Q}^{\frac{3}{20}}}{\mathcal{B}^{\frac{11}{10}}\mathcal{D}^{\frac{23}{40}}\mathcal{E}^{\frac{19}{40}}} = \frac{7.9\,10^{-4}\,\dot{m}_0^{\frac{3}{20}} r^{\frac{9}{8}}}{\alpha^{\frac{1}{10}} m_9{}^{\frac{1}{10}} \mu_m{}^{\frac{3}{8}}} f^o_{z_0} \tag{2.103}$$

$$\Sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{m_p\mu_m}{k_B}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{128\sigma\dot{m}^7}{9\alpha^8 x_\kappa \pi^7}\right)^{\frac{1}{10}} r^{-\frac{3}{4}} \frac{\mathcal{A}^{\frac{1}{10}}\sqrt{\mathcal{C}}\,\mathcal{Q}^{\frac{7}{10}}}{\mathcal{B}^{\frac{4}{5}}\mathcal{D}^{\frac{17}{20}}\mathcal{E}^{\frac{1}{20}}} = \frac{8.4\,10^{31}\,\dot{m}_0^{\frac{7}{10}} m_9{}^{\frac{1}{5}} \mu_m{}^{\frac{3}{4}}}{\alpha^{\frac{4}{5}} r^{\frac{3}{4}}} f^o_\Sigma \left[\frac{m_p}{\mathsf{cm}^2}\right] \tag{2.104}$$

$$\rho = \left(\frac{\dot{m}}{\pi}\right)^{\frac{11}{20}} \left(\frac{m_p\mu_m}{k_B}\right)^{\frac{9}{8}} \left(\frac{8\sigma}{9x_\kappa}\right)^{\frac{3}{20}} \frac{1}{\alpha^{\frac{7}{10}} r^{\frac{15}{8}}} \frac{\mathcal{B}^{\frac{3}{10}}\mathcal{E}^{\frac{17}{40}}\mathcal{Q}^{\frac{11}{20}}}{\mathcal{A}^{\frac{17}{20}}\mathcal{D}^{\frac{11}{40}}} = \frac{7.2\,10^2 0\dot{m}_0^{\frac{11}{20}} \mu_m{}^{\frac{9}{8}}}{\alpha^{\frac{7}{10}} m_9{}^{\frac{7}{10}} r^{\frac{15}{8}}} f^o_\rho \left[\frac{m_p}{\mathsf{cm}^3}\right] \tag{2.105}$$

$$v_r = -\frac{9^{\frac{1}{10}}\alpha^{\frac{4}{5}} k_B{}^{\frac{3}{4}} x_\kappa{}^{\frac{1}{10}} \dot{m}^{\frac{3}{10}}}{2^{\frac{7}{10}}\pi^{\frac{3}{10}} m_p{}^{\frac{3}{4}} \mu_m{}^{\frac{3}{4}} r^{\frac{1}{4}} \sigma^{\frac{1}{10}}} \frac{\mathcal{B}^{\frac{4}{5}}\mathcal{D}^{\frac{7}{20}}\mathcal{E}^{\frac{1}{20}}}{\mathcal{A}^{\frac{1}{10}}\sqrt{\mathcal{C}}\,\mathcal{Q}^{\frac{7}{10}}} = -\frac{6.3\,10^{-7}\alpha^{\frac{4}{5}}\dot{m}_0^{\frac{3}{10}}}{m_9{}^{\frac{1}{5}} \mu_m{}^{\frac{3}{4}} r^{\frac{1}{4}}} f^o_{v_r} \tag{2.106}$$

$$T = \alpha^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{\dot{m}}{\pi}\right)^{\frac{3}{10}} \left(\frac{m_p\mu_m}{k_B}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{9x_\kappa}{128\sigma}\right)^{\frac{1}{10}} r^{-\frac{3}{4}} \frac{\mathcal{E}^{\frac{1}{20}}\mathcal{Q}^{\frac{3}{10}}}{\mathcal{A}^{\frac{1}{10}}\mathcal{B}^{\frac{1}{5}}\mathcal{D}^{\frac{3}{20}}} = \frac{6.8\,10^6\,\dot{m}_0^{\frac{3}{10}} \mu_m{}^{\frac{1}{4}}}{\alpha^{\frac{1}{5}} m_9{}^{\frac{1}{5}} r^{\frac{3}{4}}} f^o_T\,[\mathsf{K}] \tag{2.107}$$

Über die Abschätzung, daß der magnetische Druck nicht größer werden sollte als der Gasdruck

$$[1040] \;\Rightarrow B \leq \sqrt{\alpha\, P\, 8\pi} \tag{2.108}$$

weil die Scheibe sonst zerstört wird, kann man eine Abschätzung für die obere Grenze des Magnetfeldes gewinnen.

$$[1041]\;\; B \leq 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\alpha^{\frac{1}{10}}\,\mathcal{B}^{\frac{1}{10}}\,c^2\,\mathcal{E}^{\frac{19}{40}}\,m_p{}^{\frac{3}{8}}\,\mu_m{}^{\frac{3}{8}}\,(2\,\pi^3)^{\frac{1}{20}}\,\mathcal{Q}^{\frac{17}{20}}\,\sigma^{\frac{1}{20}}\,\dot{m}^{\frac{17}{20}}}{384^{\frac{1}{10}}\,\mathcal{A}^{\frac{19}{20}}\,\mathcal{D}^{\frac{17}{40}}\,k_B{}^{\frac{3}{8}}\,r^{\frac{21}{8}}\,x_\kappa{}^{\frac{1}{20}}}} = 2.12\,10^7\,2^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\alpha^{\frac{1}{10}}\,\mathcal{B}^{\frac{1}{10}}\,c^2\,\dot{m}_0^{\frac{17}{20}}\,\mathcal{E}^{\frac{19}{40}}\,m_p\,\mu_m{}^{\frac{3}{8}}\,\pi\,\mathcal{Q}^{\frac{17}{20}}}{\mathcal{A}^{\frac{19}{20}}\,\mathsf{cm}^3\,\mathcal{D}^{\frac{17}{40}}\,m_9{}^{\frac{9}{10}}\,r^{\frac{21}{8}}}} \tag{2.109}$$

2.4 Der Vergleich mit Sternen

Zum Schluß dieses Abschnittes wollen wir die oben hergeleiteten Gleichungen benutzen, um die Akkretionsscheiben um massereiche schwarze Löcher mit Sternen zu vergleichen. Denn in der Tat ist die Situation auf einer Akkretionsscheibe in mancherlei Hinsicht vergleichbar mit heißen OB-Sternen. In Abb.2.6-Abb.2.9 sind sowohl für Scheiben, als auch für eine Reihe von OB-Sternen die Oberflächengravitation und die Effektivtemperatur gegeneinander aufgetragen. Dabei stammen die Werte für die Akkretionsscheiben, aus den Gleichungen (2.95, 2.97, 2.90) und die Werte für die Sterne sind einer Tabelle von [Kudritzki 1988] entnommen.

Es werden gerade diese beiden Werte miteinander verglichen, weil Effektivtemperatur und Gravitation die Parameter sind, die bestimmen, ob ein Stern einen starken Wind hat oder nicht. OB-Sterne als die heißesten Sterne zeichnen sich dadurch aus, daß man in ihren Spektren deutliche Zeichen eines schnell expandierenden Windes entdeckt [Owocki 1990], der die Entwicklung des Sternes deutlich beeinflussen kann.

Den Abbildungen entnehmen wir nun, daß Akkretionsscheiben um AGN gerade in ihren inneren Bereichen, diesen Sternen verblüffend ähneln, je nach Zentralmassse und Akkretionsrate liegen unterschiedlich große Bereiche genau bei den Parametern, die bei Sternen zur Entstehung eines Windes führen. Da bei der Akkretionsscheibe die verwandte Dissipationsrate und Scheibenhöhe unabhängig von der Turbulenz und dem α Parameter sind, ist dies ein relativ allgemeingültiges Ergebnis.

Allerdings gibt es noch einen entscheidenden Unterschied zwischen Sternen und Scheiben, nämlich die Geometrie. Während bei Sternen die Gravitation mit r^{-2} abnimmt, steigt sie bei Scheiben in vertikaler Richtung mit z an, d.h. die maximal zu überwindende Gravitation ist unter Umständen noch mal um ein bis zwei Größenordnungen höher. Andererseits findet aber die Beschleunigung des Windes auf Geschwindigkeiten von einigen 1000km/s bei Sternen in unmittelbarer Nähe des Sternes statt. Dort ist aber die Gravitation bei Scheiben und Sternen vergleichbar. Wir können deshalb keinen direkten Vergleich der Winde durchführen, sondern müssen Scheibenwinde unter Berücksichtigung dieser Unterschiede explizit rechnen. Dabei ist der hier angestellte Vergleich zumindest ein Indiz dafür, daß sich die Mühe lohnen könnte.

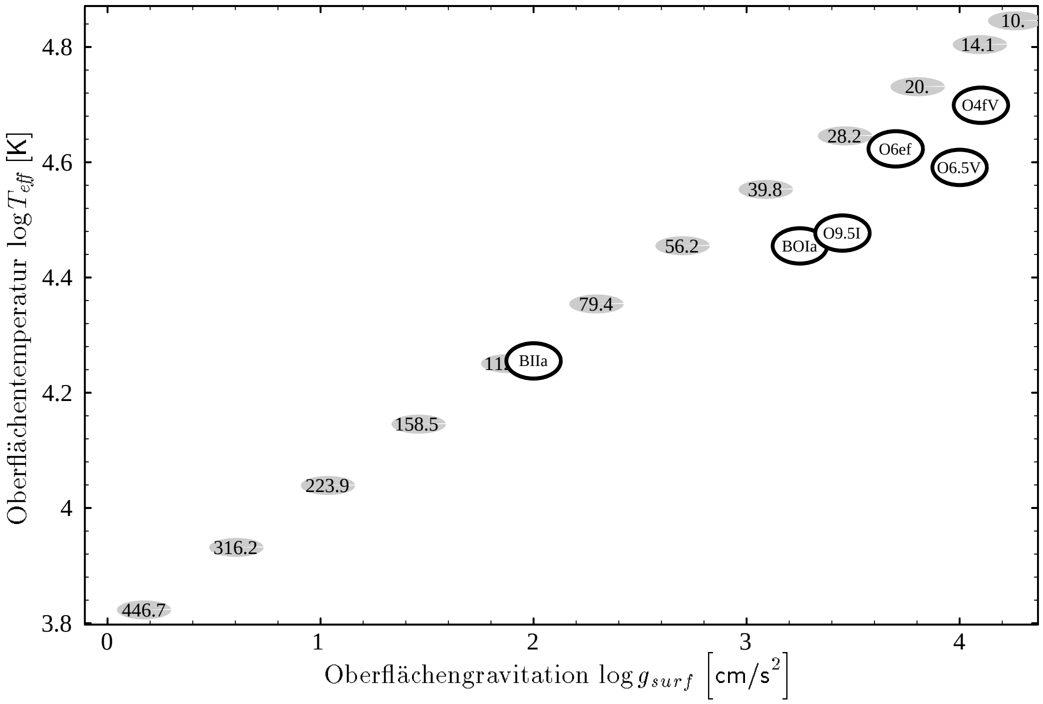

Abbildung 2.6: Hier ist Effektivtemperatur gegen die Gravitation an der Oberfläche von heißen Sternen (Kreise) und einer Akkretionsscheibe (gefüllte Ellipsen) ($m_9 = 0.1, \dot{m}_0 = 0.1$) bei verschiedenen Radien aufgetragen. Die jeweiligen Radien in Einheiten des Gravitationradius sind in den Ellipsen angegeben.

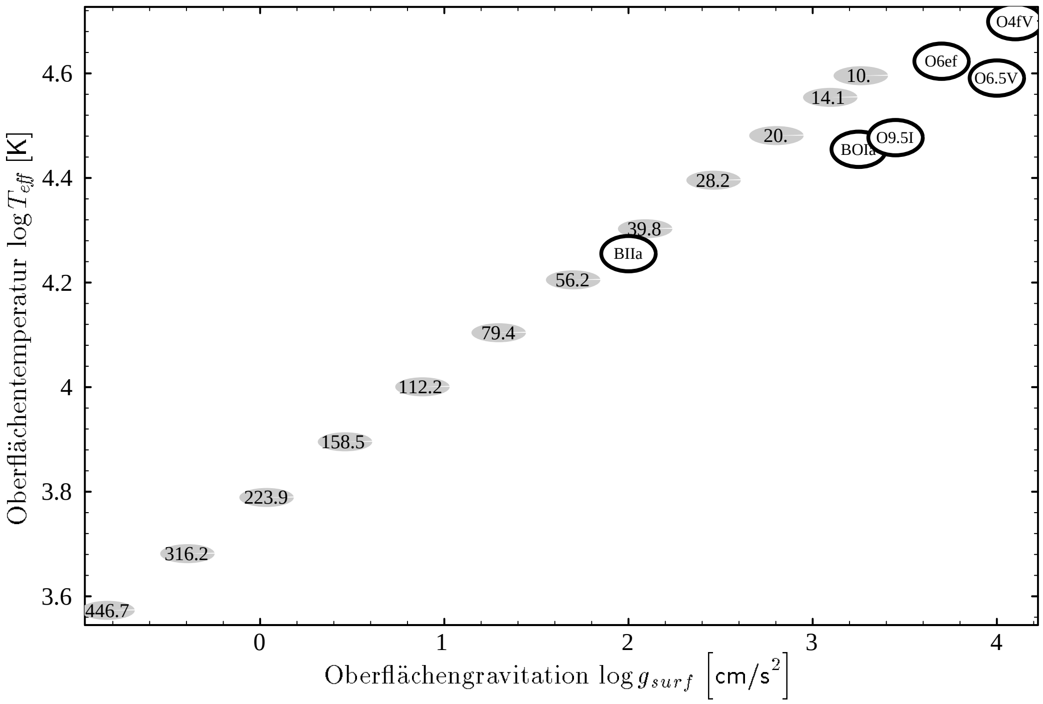

Abbildung 2.7: Das gleiche Bild wie Abb.2.6 für eine Scheibe mit niedriger Akkretionsrate ($m_9 = 0.1, \dot{m}_0 = 0.01$)

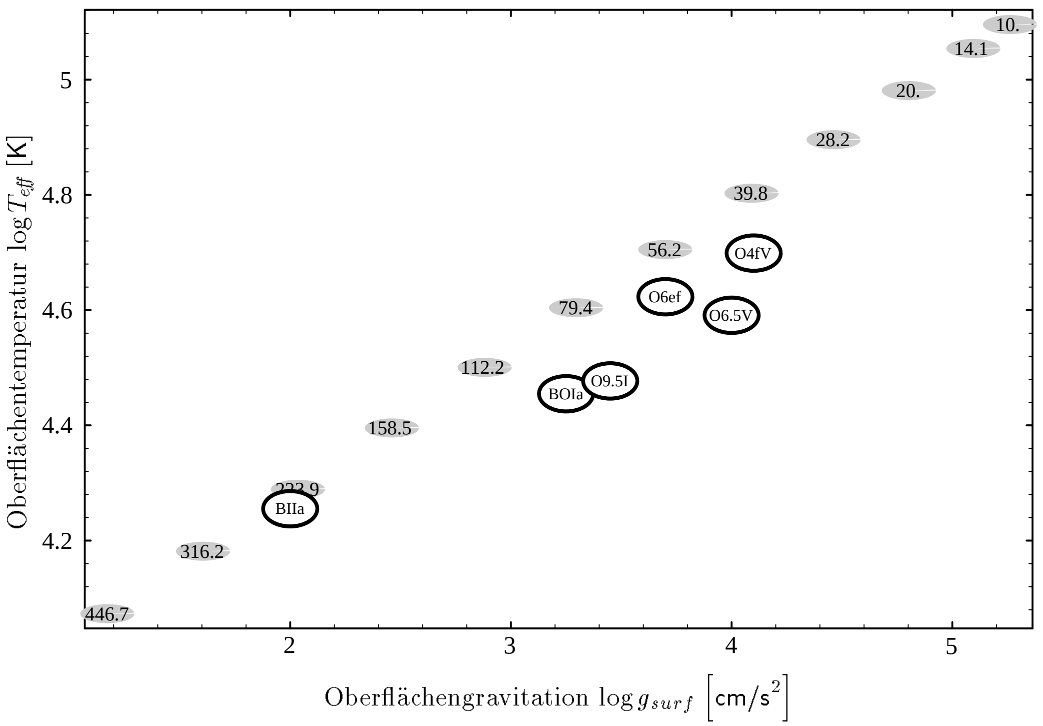

Abbildung 2.8: Das gleiche Bild wie Abb.2.6 für eine Scheibe mit einer kleineren Zentralmasse ($m_9 = 0.01, \dot{m}_0 = 0.1$)

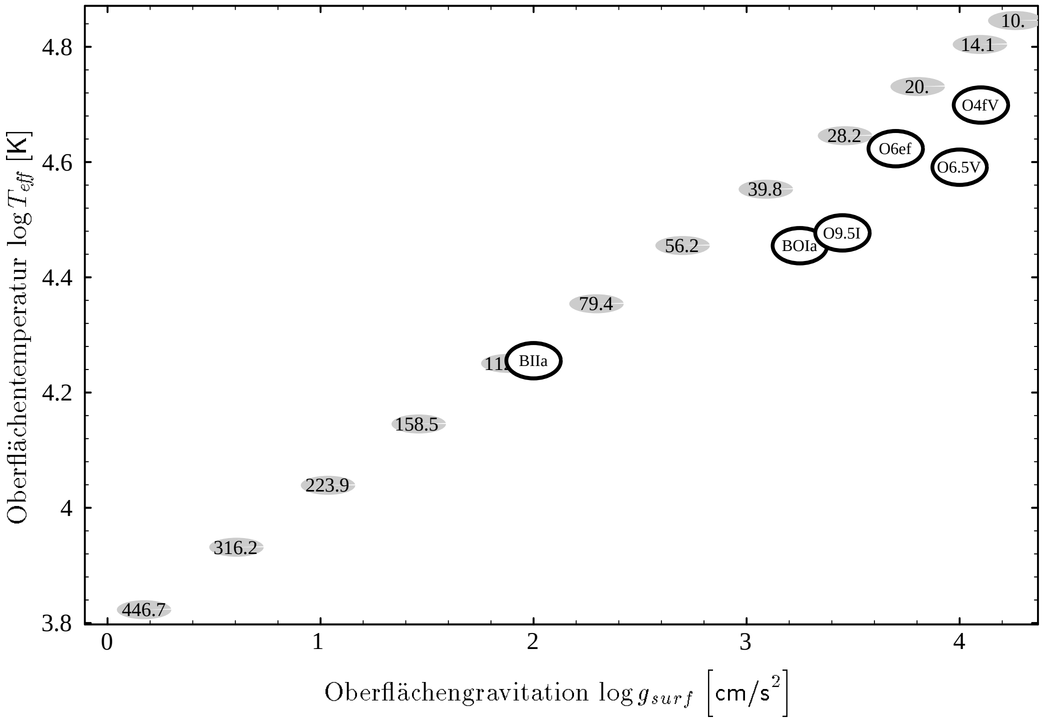

Abbildung 2.9: Das gleiche Bild wie Abb.2.6 für eine Scheibe mit kleinerer Zentralmasse und kleinerer Akkretionsrate ($m_9 = 0.01, \dot{m}_0 = 0.01$)

Kapitel 3

Die Situation über einer leuchtenden Scheibe

Nachdem wir nun die Akkretionscheibentheorie als Grundlage haben, können wir uns daran machen, die weiteren elementaren Zutaten für eine Theorie der strahlungsdruckgetriebenen Scheibenwinde bereitzustellen. Dazu gehört es, die Auwirkungen des starken Photonenfeldes über einer leuchtenden Scheibe zu beschreiben, welche sind: Ein hoher Strahlungsdruck und Heizung des über der Scheibe befindlichen Gases. Aus diesem Grund werden wir zuerst elementare Größen des Strahlungstransport auf die Scheibensituation anwenden und dann die Auswirkungen von Strahlungsdruck und Heizung erläutern.

3.1 Definitionen der Größen des Strahlungstransport

"Das Wichtigste beim Strahlungstransport ist, die Definition der Intensiät zu verstehen." (R. Schaaf) Diesem Ratschlag folgend steht am Anfang unserer Betrachtung eine genaue Definition der Begriffe des Strahlungstransports, die [Mihalas 1978] entnommen sind.

Intensität Die spezifische Intensität I_ν eines Flächenelementes dS mit Flächennormale $\vec{n}$ (hier in Kugelkoordinaten r, φ und θ, so daß die Achse $r = 0$ mit $\vec{n}$ zusammenfällt) am Orte $\vec{r}$ wird definiert, als die differentielle Energie, die pro Zeit- und Frequenzintervall in einen Raumwinkel $d\vec{\Omega}$ abgestrahlt wird, wobei $d\vec{\Omega}$ mit der Flächennormalen einen Winkel $\vec{n} \cdot d\vec{\Omega} = \cos\theta$ bildet.

$$I_\nu\left(\vec{r}, \vec{n}, t\right) = \frac{dE}{dS\ d\nu\ dt\ d\vec{\Omega}\,\vec{n}} \tag{3.1}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$d\Omega\ = \sin\theta\, d\phi\ d\theta \tag{3.3}$$

In den allermeisten Fällen wird die Intensität allerdings nicht von der azimutalen Koordinate abhängen, sondern nur vom Ort und θ.

Wichtig für die weitere Behandlung des Strahlungstransportes ist die Invarianzeigenschaft der Intensität. Diese ist nicht abhängig vom Abstand des Beobachters [Mihalas S.4]. D.h., die für die Oberfläche der Akkretionsscheibe berechnete Intensität bleibt entlang dem Richtungsvektor des Strahles an jeder Stelle gleich, wenn keine Absorption stattfindet.

Limb-darkening Normalerweise wird der Emissionsprozess als solcher isotrop sein. Die Abhängigkeit der Intensität vom Normalenvektor an einer Stelle im Emitter - hier die Scheibenoberfläche - hängt dann nur von der Geometrie ab. Wenn wir z.B. eine planparallele, optisch dicke Atmosphäre betrachten, dann muß ein Strahl, der an einem Punkt mit der Quellfunktion S_ν in der Atmosphäre erzeugt wird und bei senkrechtem Austritt eine optische Tiefe τ durchquert, bei einem um den Winkel θ geschrägten Austritt eine optische Tiefe $\tau/\cos\theta$ durchqueren. Ein schräger Strahl durchquert also mehr Materie und wird desalb stärker abgeschwächt, als ein senkrechter Strahl ($I_\nu(\theta) = \int_0^\infty S_\nu e^{\tau_\nu/\cos\theta} d\tau_\nu/\cos\theta$). Linearisiert man die Quellfunktion $S_\nu = a_0(1 + a_{ld}\tau_\nu)$ (Eddington Approximation) und führt die Integration aus, dann findet man einen einfachen Ausdruck für die θ-Abhängigkeit der Intensität[1].

$$c_{ld} = \frac{I_\nu(\theta)}{I_\nu(0)} = \frac{1 + a_{ld}\cos\theta}{1 + a_{ld}} \tag{3.4}$$

Der Faktor a_{ld} ist in Akkretionsscheibenmodellen abhängig von der Wellenlänge $a_{ld} = 1.5 + 0.56(1 - \lambda)$, in der Eddington Approximation einer grauen Atmosphäre $a_{ld} = 1.5$ und bei klassischer Elektronenstreuung $a_{ld} \approx 2$ [Laor und Netzer 1989]. Wir werden diese Funktion später bei unseren Windmodellen benutzen.

Der Fluß Die für die Berechnung der Strahlungskraft entscheidende Größe ist aber nun nicht die Intensität, sondern der Strahlungsfluß $\vec{F}$. Dies ist eine Vektorgröße, die Richtung und Stärke des gemittelten Energieflusses angibt und die Einheit $\left[\mathrm{erg/cm^2 sHz}\right]$ hat. Dazu wird über Intensität und Richtung aller einfallenden Strahlen aus allen Raumwinkeln integriert.

$$\vec{F}_\nu(\vec{r},t) = \int I_\nu(\vec{r},\vec{n},t)\,\vec{n}\,d\Omega \tag{3.5}$$

Wenn die Strahlung isotrop aus allen Raumrichtungen kommt, dann ist der Fluß gleich Null, weil im Mittel genau so viel Energie in die eine, wie in die andere Richtung fließt. Befindet sich ein Beobachter aber an einem Punkt $(r, 0, z)$ genau über einer Scheibe, so erreicht ihn die Strahlung nur aus maximal dem halben Raumwinkelbereich (bei einer unendlich ausgedehnten Scheibe) und es gibt eine von Null verschiedene z-Komponente des Flusses bei einer isotrop strahlenden Scheibe[2] und ggf. auch y und z-Komponenten, wenn die Scheibe an verschiedenen Stellen unterschiedlich hell strahlt.

3.1.1 Der Strahlungsfluß über einer Scheibe

Wenn wir jetzt den Strahlungsfluß durch eine Fläche über einer leuchtenden Scheibe berechnen wollen, gibt es dabei, im wahrsten Sinne des Wortes, zwei Sichtweisen, die zu unterschiedlichen Transformationen des Integrals (3.5) führen. Bei der ersten Methode werden wir von der Scheibe ausgehen und bei der zweiten Methode vom Beobachter über der Scheibe.

a) Transformation auf Scheibenkoordinaten Zuerst transformieren wir das Integral (3.5) auf Koordinaten der Scheibenoberfläche. Das hat den Vorteil, daß wir Symmetrien und Eigenschaften der Leuchtkraftverteilung der Scheibe leichter berücksichtigen können.

Wir nehmen an, daß wir wissen, mit welcher Intensität ein Flächenelement $dA_{\oplus}$ (sprich d-A-disk) der Scheibe an welchem Ort strahlt. Um die Integration ausführen zu können und $d\Omega$ zu transformieren, müssen wir den Raumwinkel angeben, unter dem der Beobachter das Flächenelement $dA_{\oplus}$ sieht. Wegen der Invarianzeigenschaft der Intensität ist dann (ohne Absorption) die Intensität am Ort des Beobachters gleich der Intensität auf der Scheibe.

[1]Direkt beobachten kann man diesen Effekt an der Sonne, deren Intensität vom Zentrum zum Rand (engl. limb) abzunehmen scheint. Dies ist aber ein reiner Winkeleffekt. Siehe dazu auch [Bowers und Deeming 1984, Kap. 5.9] und [Mihalas 1978, S. 314]

[2]In der Theorie planparalleler Sternatmosphären macht man sich den Effekt verschwindender x und y-Komponenten zunutze und meint mit Fluß immer nur die z-Komponente. In unserem Fall ist das nicht möglich. Mit Fluß ist immer der ganze Vektor gemeint.

Wir betrachten nun also $dA_{\oplus}$ an einer Stelle $(r_d, \phi_d, 0)$ auf der Scheibenoberfläche. Die Scheibe wird dabei als infinitesimal dünn angenommen. Der Abstand l zwischen dem Flächenelement und dem Beobachter ergibt sich aus einfachen geometrischen Betrachtungen und mit Hilfe des Kosinussatzes zu

$$l = \sqrt{r^2 + {r_d}^2 + z^2 - 2rr_d \cos\phi_d} \tag{3.6}$$

Vom Beobachter aus gesehen erscheint $dA_{\oplus}$ dann in einem Raumwinkel

$$d\Omega = \frac{\cos\theta \, dA_{\oplus}}{l^2} \tag{3.7}$$

Der Raumwinkel gibt die Größe des Oberflächenstückes an, das von den Sehstrahlen die den Rand der beobachteten Fläche mit dem Beobachtungspunkt verbinden, aus einer Kugelschale mit Radius 1 um den Beobachter herum, herausgeschnitten wird. Die obige Beziehung ergibt sich, wenn man die Fläche senkrecht zum Beobachtungsstrahl auf die Einheitskugel mit Hilfe der Strahlensätze projeziert.

Wenn wir jetzt benutzen, daß das Flächenelement in Zylinderkoordinaten durch

$$dA_{\oplus} = r_d \, d\phi_d \; dr_d \tag{3.8}$$

gegeben ist, können wir das Raumwinkelelement auf Scheibenkoordinaten transformieren:

$$d\Omega = \frac{r_d \cos\theta \, d\phi_d \; dr_d}{l^2} \tag{3.9}$$

Wobei

$$\cos(\theta) = \frac{z}{l} \tag{3.10}$$

und

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{z^2}{l^2}} \tag{3.11}$$

ist. Als zweites gilt es den Einheitsvektor $\vec{n}$ durch Oberflächenkoordinaten auszudrücken. Einfache geometrische Überlegungen ergeben

$$\vec{n} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} r - r_d \cos\phi_d \\ -r_d \sin\phi_d \\ z \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Setzt man nun (3.6-3.12) in (3.5) ein, so ergibt sich für den Fluß:

$$\vec{F}_\nu(\vec{r}, t) = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{2\pi} \frac{r_d z I_\nu(\vec{r}, \theta, t)}{\left(r^2 + {r_d}^2 + z^2 - 2rr_d \cos\phi_d\right)^2} \begin{pmatrix} r - r_d \cos\phi_d \\ -r_d \sin\phi_d \\ z \end{pmatrix} d\phi_d \; dr_d \tag{3.13}$$

Bei dem hier vorliegenden Fall, der azimutalen Unabhängigkeit der Intensität mitteln sich die Beiträge für die ϕ-Komponente des Normalenvektors bei Integration über 2π genau heraus, so daß dieser genau in radiale Richtung zeigt[3].

b) Transformation auf Wolkenkoordinaten Befindet sich der Beobachter sehr nahe über der Scheibe, so ist zu vermuten, daß der Hauptteil des Energieflusses aus dem Bereich direkt unter ihm kommen wird und das Integral wird dort ein scharfes Maximum haben, gegen das die Symmetrien der Scheibe zweitrangig werden. Die Form des Integranden wird hauptsächlich von der Winkelabhängigkeit des Flusses diktiert. Die natürliche Wahl der Koordinaten können dann nicht mehr Scheibenkoordinaten sein, sondern wir versetzen uns in die Lage eines Beobachters,

[3] Dies gilt später nicht mehr, wenn wir Absorption in Linien berücksichtigen. Dort kann es eine, wenn auch kleine, von Null verschiedene ϕ-Komponente geben.

der auf einer Wolke über der Scheibe sitzend diese beobachtet und heften dort ein mitbewegtes Koordinatensystem an[4].

Diese "Wolkenkoordinaten" sind nun einfache sphärische Kugelkoordinaten (φ, ϑ), wobei bei der Integration über die Scheibe nur über den Teil des unteren Halbraumes integriert wird, der dem Raumwinkel entpricht, unter dem die Scheibe von der Wolke aus gesehen wird. Nur in der Nähe eines schwarzen Loches oder aber bei einer konkaven Scheibe kann, der Fall eintreten, daß über einen größeren Bereich integriert werden muß.

Um die beiden Koordinatensysteme miteinander zu verbinden, betrachten wir zusätzlich noch ein kartesisches Koordinatensystem auf der Scheibenoberfläche, so daß der Fußpunkt der Wolke auf der x-Achse im Abstand r liegt und die Wolke selber in der Höhe z über der Scheibe sitzt. Ein Strahl, dessen Richtung durch einen Normalenvektor in Kugelkoordinaten (ϑ,φ) festgelegt ist, beschreibt bei konstantem ϑ $(0 \leq \vartheta < \pi/2)$ und Variation von φ auf der Scheibe Kreise mit Radius

$$r' = z \tan \vartheta. \tag{3.14}$$

Im kartesischen Koordinatensystem auf der Scheibe haben Emissionspunkte die Koordinaten

$$x = r - \cos \varphi r' \tag{3.15}$$

und

$$y = -\sin \varphi r'. \tag{3.16}$$

Der Abstand r_d des Emissionspunktes vom Mittelpunkt der Scheibe ist dann einfach

$$r_d = \sqrt{r^2 - 2rz\cos\varphi\tan\vartheta + z^2 \tan\vartheta^2}. \tag{3.17}$$

Dieser Ausdruck ist nichts anderes, als der Kosinussatz für ein Dreieck mit den Seitenlängen r, r', r_d und dem Winkel $\pi - \varphi$.

Der Normalenvektor und das Raumwinkelelement sind durch (3.2) und (3.3) gegeben, wobei wir $\theta \rightarrow \vartheta$ und $\phi \rightarrow \varphi$ ersetzten. Der Fluß ist dann

$$\vec{F}(\vec{r}, \nu, t) = \int_{\vartheta(\min)}^{\vartheta(\max)} \int_{\varphi(\min)}^{\varphi(\max)} I_\nu(\vec{r}, \vartheta, t) \sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} d\varphi \, d\vartheta \tag{3.18}$$

Die Integrationsgrenzen: Formal sieht der Ausdruck (3.18) sehr viel einfacher aus, als in (3.13). Man darf aber nicht vergessen, daß die Schwierigkeiten jetzt im Abstand r (3.17) und dadurch auch in den Integrationsgrenzen, die jetzt von der Integrationsvariablen abhängen, versteckt sind. Man erhält sie durch Auflösen von (3.17) nach den entsprechenden Winkelfunktionen.

$$\cos\varphi = \frac{r^2 - {r_d}^2 + z^2 \tan\vartheta^2}{2rz\tan\vartheta} \tag{3.19}$$

$$\tan\vartheta = \frac{r\cos\varphi + \sqrt{{r_d}^2 - r^2 \sin\varphi^2}}{z} \tag{3.20}$$

Wir brauchen jetzt nur noch r_d durch den jeweiligen inneren, bzw. äußeren Radius $r_{in/out}$ zu ersetzen.

[4]Ein weiterer Vorteil dieser Sichtweise ist, daß man eine Ablenkung der Photonenbahnen z.B. in der Nähe eines schwarzen Loches leichter mitberücksichtigen könnte, weil man, wie beim ray-tracing Verfahren, den Weg der Photonen zurückverfolgt.

3.1.2 Strahlungsdruck

Absorptionskoeffizient Um zu berechnen, wieviel Energie, bzw. Impuls des Strahlungsflusses nicht nur durch eine Fläche fließen, sondern auch tatsächlich in einem Volumenelement absorbiert werden, muß zusätzlich noch ein makroskopischer Extinktionskoeffizient eingeführt werden, welcher angibt, wieviel Energie dE eines Strahls mit der Intensität I und Raumwinkel $d\Omega$, der im Winkel θ durch die Wirkungsfläche dS eines Volumenelementes längs der Strecke ds dringt, pro Frequenzintervall und Zeit absorbiert wird.

$$dE = \cos\theta I_\nu(\theta)\,\chi(\vec{r},\vec{n},\nu,t)\,d\Omega\;dS\;d\nu\;ds\;dt \tag{3.21}$$

Der Extinktionskoeffizient ist äquivalent zu dem Produkt der Anzahldichte n der Teilchen an einem Ort und deren Wirkungsquerschnitt bei der jeweiligen Frequenz.

$$\chi(\nu) \equiv n\sigma(\nu) \tag{3.22}$$

Oft ist es auch üblich den Extinktionskoeffizienten χ durch die Opazität κ auszudrücken, die angibt wie groß der Wirkungsquerschnit pro Masseineiheit ist.

$$\chi_\nu = \rho\kappa_\nu \tag{3.23}$$

$$\Leftrightarrow \kappa_\nu = \frac{n\sigma(\nu)}{\rho} \tag{3.24}$$

Strahlungsdruck Da Photonen einen Impuls E/c haben, bedeutet die Absorption von Energie auch gleichzeitig die Absorption von Impuls. Die Strahlung übt also einen Druck auf den Absorber aus. Sei nun die Dicke eines Volumenelementes dz, so ist

$$dz = \cos\theta\,ds \tag{3.25}$$

wenn ds wieder wie oben die Strecke angibt, die ein Strahl in einem Volumenelement zurücklegt. Der absorbierte Impuls pro Volumen, Zeit und Frequenzintervall, also die differentielle Kraftdichte $d\vec{f}$ ist

$$d\vec{f_\nu} = \frac{dE\,\vec{n}}{c\,dS\;dt\;dz} \tag{3.26}$$

$$\Rightarrow d\vec{f_\nu} = c^{-1} I_\nu(\theta)\,\chi(\vec{r},\vec{n},\nu,t)\,d\Omega\;d\nu\,\vec{n} \tag{3.27}$$

Die gesamte Beschleunigung $\vec{g}_{rad}$, die der Beobachter durch die absorbierten Photonen erfährt, erhält man dann durch Integration über alle Raumwinkel und alle Frequenzen, sowie durch Division mit der Massendichte ρ.

$$g_{\vec{rad}} = (c\rho)^{-1} \iint I_\nu(\theta)\,\chi(\vec{r},\vec{n},\nu,t)\vec{n}\,d\Omega\;\;d\nu \tag{3.28}$$

Für den Fall, daß χ isotrop ist, d.h. unabhängig von $\vec{n}$ bzw. Ω, erhält man bei Integration über Ω die Strahlungsbeschleunigung als Funktion des Flusses,wie er in (3.5) definiert wurde.

$$g_{\vec{rad}} = (c\rho)^{-1} \int_0^\infty F_\nu \chi_\nu\,d\nu \;= c^{-1} \int_0^\infty F_\nu \kappa_\nu\,d\nu \tag{3.29}$$

3.2 Thomsondruck über einer Scheibe

Am Ende dieses Kapitels wollen wir unser Wissen benutzen, um etwas über die Struktur der Strahlungsbeschleunigung über einer Scheibe zu lernen. Dafür ist der Thomsonquerschnitt ideal geeignet, weil er eine einfache Konstante ist und die Strahlungsbeschleunigung dann allein von der Geometrie abhängt, die ihr ihren Stempel sichtbar eindrücken wird.

3.2.1 Thomson-Wirkungsquerschnitt

Die Temperaturen, die sich für die Oberfläche von Quasarscheiben aus der Standardtheorie ergeben, liegen sämtlich unter $10^6 K$. Bei dieser Temperatur liefert die Planckkurve, als guter Näherung für das lokale Spektrum, einen Cut-off bei einer Frequenz von $10^{18}\mathsf{Hz}$ [Rybicki und and Lightman 1979, S. 22], dies entspricht c.a. 4000eV und liegt somit um 2 Größenordnungen unter der Ruhemasse des Elektrons von 511keV. Damit lassen sich die klassischen und bei diesen Energien vor allem frequenzunabhängigen Wirkungsquerschnitte für Thomson Streuung von unpolarisierter Strahlung anwenden [ebenda S.92-93]. Bei der Ableitung betrachtet man ein Elektron, daß als klassischer Oszillator im einfallenden elektromagnetischen Feld Dipolstrahlung aussendet. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann durch[5]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} {r_{ce}}^2 \left(1 + \cos^2\theta\right) \tag{3.30}$$

und der totale Wirkungsquerschnitt durch

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} {r_{ce}}^2 = 6.65\,10^{-25}\,\mathsf{cm}^2 \tag{3.31}$$

$$r_{ce} = \frac{e^2}{m_e c^2} \tag{3.32}$$

gegeben, wobei r_{ce} der klassische Elektronenradius und θ der Winkel zwischen einfallender und gestreuter Strahlung ist. Bei $\theta \neq 0$ ist der ausfallende Strahl polarisiert. In erster Näherung kann man aber die leichte Winkelabhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnittes vernachlässigen und nur den totalen Wirkungsquerschnitt für die Berechnung der Opazität betrachten.

$$\kappa^{Th} = \frac{n\sigma_{Th}}{\rho} \tag{3.33}$$

Wenn wir davon ausgehen, daß es sich bei dem in Frage kommenden Material um eine "normale" Mischung heißen ionisierten Gases handelt, dann besteht diese zum größten Teil aus X Masseneilen Wasserstoff und Y Massenteilen Helium, welche den Hauptlieferanten für Elektronen darstellen, sowie einem verschwindenden Teil Z schwererer Elemente, so daß $X + Y \approx 1$ und $Z \approx 0$ ist. Wasserstoff liefert im Mittel ein Elektron und Helium 2 Elektronen pro Masseneinheit. Die Elektronendichte n beträgt dann [Harwitt 1988, S.333]

$$n = \frac{1}{2}(1 + X)\frac{\rho}{m_p} \tag{3.34}$$

$$\Rightarrow \kappa^{Th} = \frac{1}{2}(1 + X)\frac{\sigma_{Th}}{m_p} = 0.199\,(1 + X)\,\frac{\mathsf{cm}^2}{\mathsf{g}} \tag{3.35}$$

Für ein reines Wasserstoffgas $X = 1$ ist $\kappa_{Th} = 0.4\mathsf{cm}^2/\mathsf{g}$ und für ein Standardgemisch $X = 0.75$ ist $\kappa_{Th} = 0.35\mathsf{cm}^2/\mathsf{g}$.

3.2.2 Strahlungsdruck mit Thomsonquerschnitt

Aus (3.29) und (3.35) ergibt sich für die Strahlungsbeschleunigung durch die winkelunabhängige Thomsonstreuung *(kurz Thomsonbeschleunigung oder Thomsondruck)*

$$g^{\vec{T}h} = \frac{\kappa^{Th}}{c} \int F_\nu \, d\nu \; = 6.63\,10^{-12}\,(1 + X) \int \vec{F}_\nu \, d\nu \, \frac{\mathsf{s\,cm}}{\mathsf{g}}. \tag{3.36}$$

[5] Aus technischen Gründen werden in dieser Arbeit die Potenzen der trigonometrischen Funktionen als $\sin\theta^n$ anstatt als $\sin^n\theta$ dargestellt, da aber in keiner Formel Potenzen der Argumente trigonometrischer Funktionen vorkommen (also z.B. $\sin(\theta^n)$), sind Verwechslungen ausgeschlossen.

Wir fangen mit dem einfachsten Fall einer unendlich ausgedehnten isothermen Scheibe im thermischen Gleichgewicht an. Die Intensität der Strahlung ist dann durch die Planckfunktion gegeben.

$$I_\nu = B_\nu = \frac{2h\nu^3}{\left(e^{\frac{h\nu}{Tk_B}} - 1\right) c^2} \tag{3.37}$$

Integriert über alle Frequenzen $I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$ ergibt das

$$I = \frac{\sigma T^4}{\pi} \tag{3.38}$$

mit der Stefan-Boltzmann Konstante σ, definiert als

$$\sigma = \frac{2\pi^5 {k_B}^4}{15c^2h^3}. \tag{3.39}$$

Die z-Komponente des in einen *Halb*raum abgestrahlten Flusses ist (3.5)

$$F_\nu = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(\theta) \cos\theta \sin\theta \, d\theta \tag{3.40}$$

Bei uns soll die Intensität vorerst unabhängig von θ sein, also liefert uns die Integration einen Faktor[6] 1/2 und wir sehen, daß

$$F_\nu = \pi I_\nu \tag{3.41}$$

Damit und mit (3.38) erhalten wir die Strahlungskraft über einer "schwarzen" Scheibe.

$$g_z^{Th} = 3.76\,10^{-16}1\,(1+X)\,T^4 \frac{\mathsf{cm}}{\mathsf{K}^4\mathsf{s}^2} \tag{3.42}$$

$$g^{Th}{}_z = \frac{T^4 \kappa^{Th} \sigma}{c} = 3.76\,10^{-16}\,(1+X)\,T^4 \frac{\mathsf{cm}}{\mathsf{K}^4\mathsf{s}^2} \tag{3.43}$$

3.2.3 Strahlungsdruck über der Scheibe

In der nächsten Stufe gestehen wir der Scheibe eine radiale Verteilung der Effektivtemperatur zu, und nehmen an, daß sie bei jedem Radius wie ein schwarzer Körper strahlt, dessen Temperatur durch ein Potenzgesetz der Form

$$T(r) = \frac{T_0}{{r_d}^{\frac{\aleph}{4}}} \tag{3.44}$$

gegeben ist. Das Abschneiden erfolgt über den inneren und äußeren Radius $r_{in/out}$ der Scheibe. Wir vernachlässigen weiterhin die Winkelabhängigkeit der Intensität $a_{ld} = 0$ (siehe Fußnote S.35) und erhalten mit (3.38), (3.28) und (3.32) den Strahlungsdruck durch Thomsonstreuung, ausgedrückt durch ein Integral in Scheibenkoordinaten.

$$\vec{g}^{Th} = \frac{{T_0}^4 \kappa^{Th} \sigma}{\pi c} z \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_d \, dr_d}{r^{\aleph-1}(r^2 + {r_d}^2 + z^2 - 2rr_d \cos\phi_d)^2} \begin{pmatrix} r - r_d \cos\phi_d \\ -r_d \sin\phi_d \\ z \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

Wir spalten den Beschleunigungsvektor in seine Komponenten auf und führen die Integration über ϕ_d aus.

$$g_z^{Th} = -\frac{{T_0}^4 \kappa^{Th} \sigma}{c} z^2 \int_{r_{in}^2}^{r_{out}^2} \frac{r^2 + z^2 + x}{x^{\frac{\aleph}{2}} \left(4r^2z^2 + (z^2 - r^2 + x)^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{{T_0}^4 \kappa^{Th} \sigma}{c} c_z^{\Phi} \tag{3.46}$$

[6] Bei Verwendung der Limb-darkening Funktion (3.4) ändert sich der Faktor nur wenig ($1/2 \rightarrow 1/2(3 + 2a_{ld})/(3 + 3a_{ld})$).

$$g_r^{Th} = -\frac{{T_0}^4 \kappa^{Th} \sigma}{c} rz \int_{r_{in}^2}^{r_{out}^2} \frac{r^2 + z^2 - x}{x^{\frac{\aleph}{2}} \left(4r^2z^2 + \left(z^2 - r^2 + x\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \, dx \; = \frac{{T_0}^4 \kappa^{Th} \sigma}{c} c_r^{\Phi} \tag{3.47}$$

Dabei haben wir schon die Transformation $r^2 = x$ und $dx = 1/2\sqrt{x}dr$ vorgenommen, und sehen, daß die Strahlungsbeschleunigung durch einen Term analog zu (3.43) und Korrekturfaktoren $c_{r/z}^{\Phi}$ in Form von Integralen ausgedrückt werden kann, welche die Geometrie und den Temperaturverlauf berücksichtigen. Wir wollen jetzt diese Korrekturfaktoren für drei Spezialfälle explizit ausrechnen.

a) $\aleph = 0$

Zum Einstieg setzen wir $\aleph = 0$, d.h. wir haben eine isotherme aber endliche Scheibe. Wir werden daran sehen, welchen Einfluß diese endliche Abmessung der Scheibe auf den Strahlungsdruck hat. Das Integral (3.46, 3.47) ist unter diesen Voraussetzungen sehr leicht lösbar [Gradshteyn und Ryzhik 1980, S.86, 2.271 (5) u. (7)].

$$c_z^{\Phi} = \frac{{r_{out}}^2 - \left(z^2 + r^2\right)}{2\sqrt{4r^2z^2 + \left({r_{out}}^2 + z^2 - r^2\right)^2}} - \frac{{r_{in}}^2 - \left(z^2 + r^2\right)}{2\sqrt{4r^2z^2 + \left({r_{in}}^2 + z^2 - r^2\right)^2}} \tag{3.48}$$

$$c_r^{\Phi} = \frac{z\left(r^2 z + r_{out}^2 + z^2\right)}{2r\sqrt{4r^2z^2 + \left({r_{out}}^2 + z^2 - r^2\right)^2}} - \frac{z\left(r^2 + {r_{in}}^2 + z^2\right)}{2r\sqrt{4r^2z^2 + \left({r_{in}}^2 + z^2 - r^2\right)^2}} \tag{3.49}$$

In Abb.3.1 und Abb.3.2 ist die Lösung für eine Referenzscheibe mit $r_{in} = 10$ und $r_{out} = 1000$ für verschiedene Positionen des Absorbers graphisch dargestellt.

b) $\aleph = 2$

Vollständig läßt sich das Integral (3.46,3.47) auch lösen, wenn $\aleph = 2$ ist, also wenn die Temperatur mit der Wurzel des inversen Radius abnimmt. Dieser Fall könnte sich z.B. ergeben, wenn die Scheibe extern geheizt wird. Mit den Definitionen

$$a = \left(r^2 + z^2\right)^2 \tag{3.50}$$

$$b = -2r^2 + 2z^2 \tag{3.51}$$

$$\Delta = 16r^2z^2 \tag{3.52}$$

$$R = a + bx + x^2 \tag{3.53}$$

wird

$$c_z^{\Phi} = z^2 \left(\int_{{r_{in}}^2}^{{r_{out}}^2} R^{-\frac{3}{2}} \, dx \; + \sqrt{a} \int_{{r_{in}}^2}^{{r_{out}}^2} \left(R^{\frac{3}{2}} x\right)^{-1} dx \right) \tag{3.54}$$

$$c_r^{\Phi} = rz \left(\sqrt{a} \int_{{r_{in}}^2}^{{r_{out}}^2} \left(R^{\frac{3}{2}} x\right)^{-1} dx \; - \int_{{r_{in}}^2}^{{r_{out}}^2} R^{-\frac{3}{2}} \, dx \right). \tag{3.55}$$

So folgt aus [Gradshteyn und Ryzhik 1980, S.83 2.264 (5), S.85 2.269 (4) und S.84 2.266 (d)]bzw. ausgedrückt durch die Opazität bzw. ausgedrückt durch die Opazität

für den hier gegebenen Fall $a > 0$ und $\Delta > 0$

$$c_z^{\Phi} = z^2 \left[\frac{2\left(b + 2x\right)}{\Delta\sqrt{R}} - \frac{2\left(-2a + b^2 + bx\right)}{\Delta\sqrt{aR}} - \frac{1}{a} \ln\left(\frac{2a + bx}{\sqrt{\Delta}x} + \sqrt{1 + \frac{\left(2a + bx\right)^2}{\Delta x^2}} \right) \right]_{{r_{in}}^2}^{{r_{out}}^2} \tag{3.56}$$

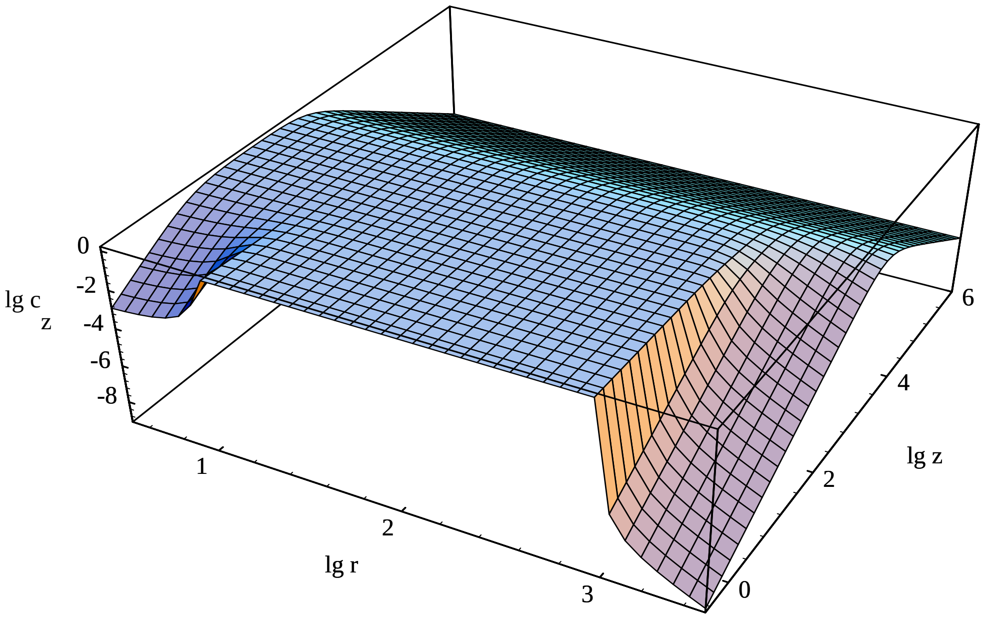

Abbildung 3.1: Korrekturfaktor c_z^{Φ} für $\aleph = 0$ (3.48) über einer Scheibe von $10 < r < 1000$. Horizontal ist der Radius der Scheibe aufgetragen, vertikal die Höhe des Absorbers über der unendlich dünnen Scheibe.

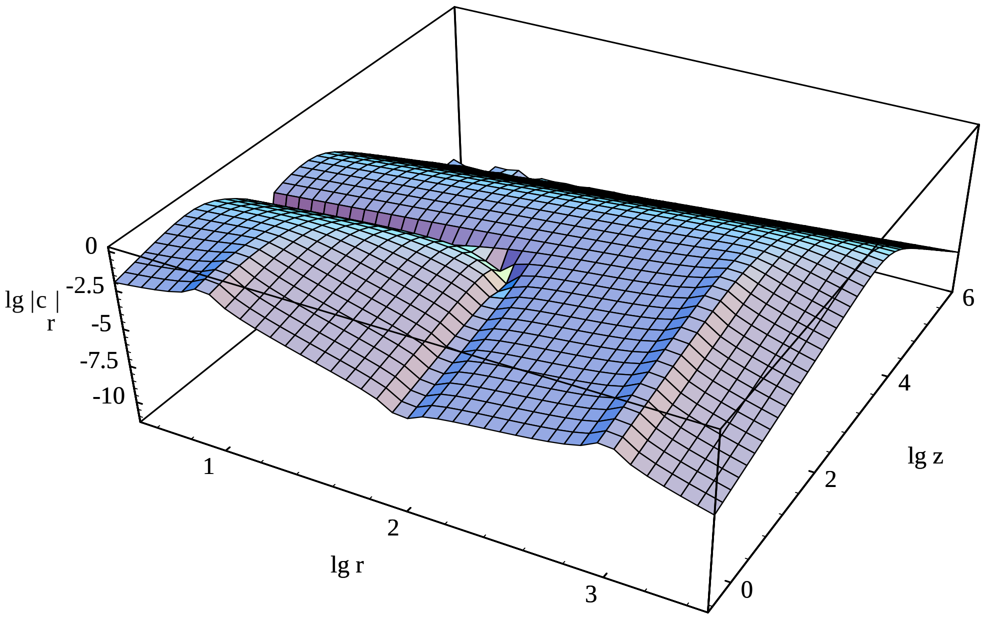

Abbildung 3.2: Absolutbetrag des Korrekturfaktors c_r^{Φ} für $\aleph = 0$ (3.49) über einer Scheibe von $10 < r < 1000$. Der innere, abgeschnürte Bereich $r, z < 100$ ist negativ, d.h. die Beschleunigung ist zum Zentrum gerichtet.

$$c_r^{\Phi} = rz\left[-\frac{2\,(b+2x)}{\Delta\sqrt{R}} - \frac{2\left(-2a+b^2+bx\right)}{\Delta\sqrt{aR}} - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{2a+bx}{\sqrt{\Delta}x} + \sqrt{1+\frac{\left(2a+bx\right)^2}{\Delta x^2}}\right)\right]_{{r_{in}}^2}^{{r_{out}}^2} \tag{3.57}$$

Auch hier sind die Ergebnisse wieder graphisch dargestellt (Abb.3.3 u. Abb.3.4), dabei ist aber die Strahlungsbeschleunigung mit einem Faktor r^2 skaliert, um die Potenzabhängigkeit der Temperatur herauszulassen.

c) $\aleph = 3$

Aus der Standardtheorie (Kap.2) wissen wir aber nun, daß die Dissipationsrate, welche die Temperatur bestimmt, bis auf den inneren Bereich, mit einem r^{-3} Potenzgesetz abfällt, was für unser Integral $\aleph = 3$ bedeutet. Leider ist das entstehende Integral dann nicht mehr so leich zu lösen. Allerdings können wir den Grenzfall betrachten, denn sehr hoch über der Scheibe wenn $z \gg r$ ist, kann r^2 in (3.46, 3.47) für jedes x gegenüber z^2 vernachlässigt werden, d.h. $r \longrightarrow 0$. Das resultierende Integral ist analytisch lösbar und wir erhalten

$$c_z^{\Phi} = \frac{2}{r_{out}z^2} - \frac{2}{r_{in}z^2} - \frac{r_{in}}{z^2\left({r_{in}}^2+z^2\right)} + \frac{r_{out}}{z^2\left({r_{out}}^2+z^2\right)} - \frac{3}{z^3}\left(\arctan\frac{r_{in}}{z} + \arctan\frac{r_{out}}{z}\right) \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} c_r^{\Phi} &= \frac{-2r}{r_{in}z^3} + \frac{2r}{r_{out}z^3} - \frac{rr_{in}}{z({r_{in}}^2+z^2)^2} - \frac{5rr_{in}}{2z^3\left({r_{in}}^2+z^2\right)} + \frac{rr_{out}}{z({r_{out}}^2+z^2)^2} \\ &\quad + \frac{5rr_{out}}{2z^3\left({r_{out}}^2+z^2\right)} - \frac{9r}{2z^4}\left(\arctan\frac{r_{in}}{z} + \arctan\frac{r_{out}}{z}\right) \end{aligned} \tag{3.59}$$

Es ist deutlich zu sehen, daß die Scheibe sich jetzt wie eine Punktquelle verhält, wobei die vertikale Beschleunigung mit einem z^{-2} Gesetz abnimmt und die radiale Beschleunigung mit einer um eins höheren Potenz schneller verschwindet (Abb.3.5 und Abb.3.6).

Leider läßt sich der einfache Grenzwert für den Nahbereich der Scheibe nicht so leicht ausführen, denn der Integrand wird für $z \longrightarrow 0$ an der Stelle $r^2 = x$ unendlich und hängt daher in diesem Nahbereich stark von z ab. Der Term r^2z^2 darf daher nicht verschwinden und das Integral vereinfacht sich nicht an wesentlicher Stelle. Wir sind deshalb auf numerische Integration angewiesen.

Dieser Nahbereich ist in Abb.3.5 und Abb.3.6 dargestellt. Einmal wird der Verlauf von $c_{z/r}^{\Phi}$ entlang einer konstanten Höhe verfolgt und einmal bei einem Verlauf, wo die Höhe proportional zu einem Zehntel des Radius ist.

.

3.2.4 Diskussion des Strahlungstermes

Wenn wir die Abbildungen der Strahlungsbeschleunigung betrachten, dann springen einige besondere Eigenschaften direkt ins Auge, die mit den verschiedenen Regionen über der Scheibe verknüpft sind. Man sollte sich klar machen, woher diese kommen, um ein Gefühl für die Struktur und die Richtigkeit der Integrale zu bekommen.

Sehr deutlich zu sehen, sind zum Beispiel die Effekte am Rand der Scheibe, die in dieser abrupten Form sicher nicht in der Natur vorkommen werden. Bei der vertikalen Komponente äußert sich das Ende der Scheibe durch einen starken Abfall der Beschleunigung direkt über der Scheibe. Erst wenn der Abstand von der Scheibe in etwa der Dimension derselben entspricht, verschwindet diese scharfe Grenze. Bei der vertikalen Komponente ist diese Kante nicht so stark ausgeprägt und besteht in erster Linie aus einem kleinen Buckel, der dadurch zustande kommt, daß direkt am Rand der Druck von einer Seite plötzlich fehlt, so daß der radial nach außen gerichtete Druck kurzfristig sogar noch ansteigt.

Der zweite wichtige Punkt betrifft den vertikalen Verlauf der Beschleunigung. Wir sehen, daß am Anfang die Beschleunigung konstant zu sein scheint (das Plateau), bzw. sogar ansteigt,

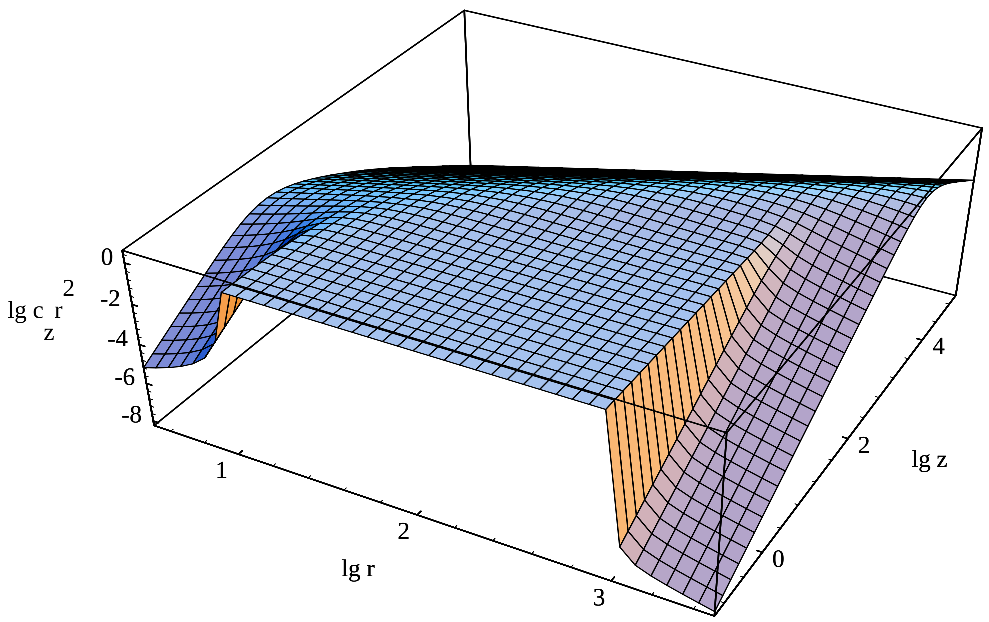

Abbildung 3.3: Korrekturfaktor c_z^Φ für $\aleph = 2$ (3.56), Die z-Achse gibt das Verhältnis der Strahlungsbeschleunigung zur Beschleunigung durch einen schwarzen Körper bei der jeweiligen lokalen Temperatur an.

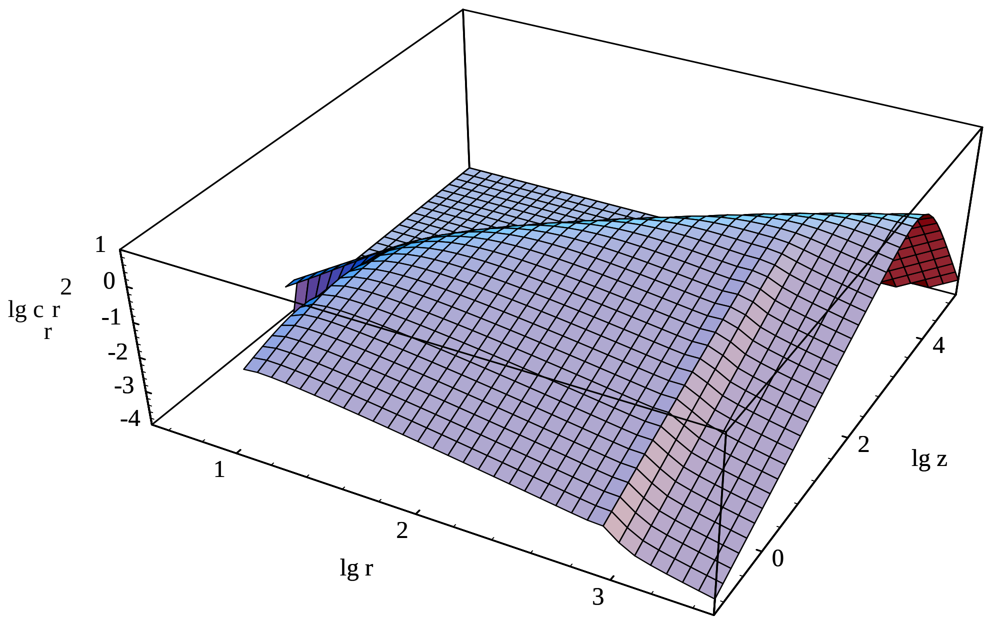

Abbildung 3.4: Korrekturfaktor c_r^Φ für $\aleph = 2$ (3.57). Die z-Achse gibt das Verhältnis der radialen Strahlungsbeschleunigung zur vertikalen Beschleunigung durch einen schwarzen Körper bei der jeweiligen lokalen Temperatur an.

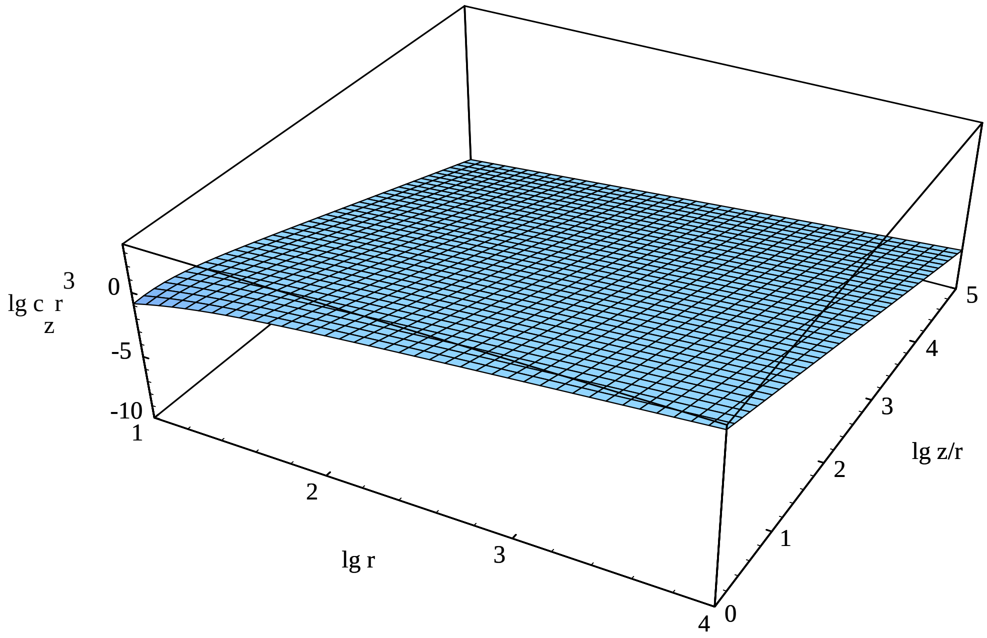

Abbildung 3.5: Korrekturfaktor c_z^{Φ} für $\aleph = 3$ und dem Grenzfall $r \ll z$ (3.58) über einer Scheibe von $10 < r < 1000$. Die Höhe wird mit dem Radius skaliert und c_z^{Φ} mit $r^{\aleph}$.

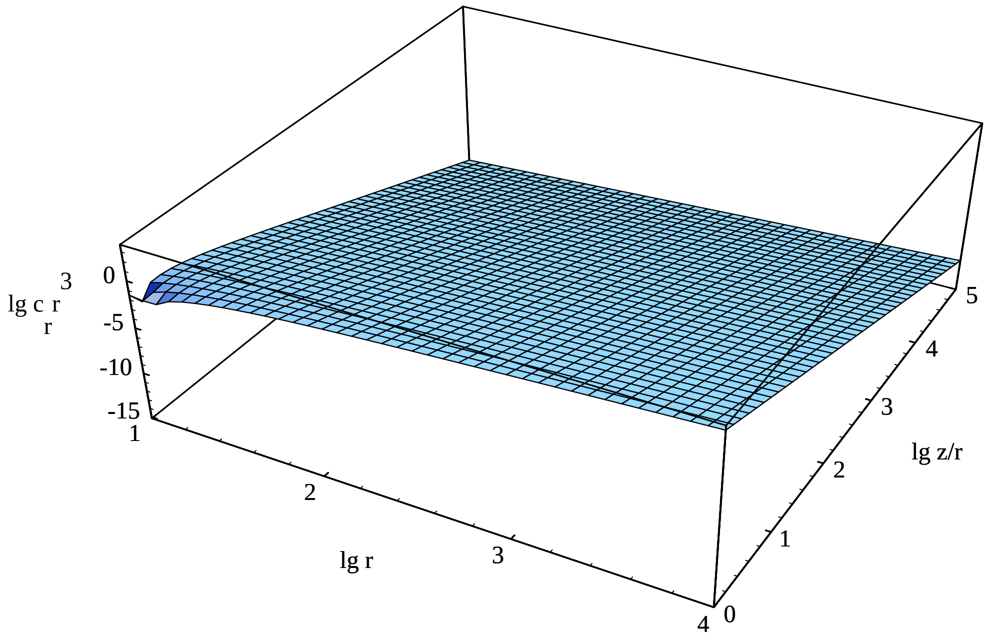

Abbildung 3.6: Korrekturfaktor c_r^{Φ} für $\aleph = 3$ und dem Grenzfall $r \ll l$ (3.59) über einer Scheibe von $10 < r < 1000$. Die Höhe wird mit dem Radius skaliert und c_z^{Φ} mit $r^{\aleph}$.

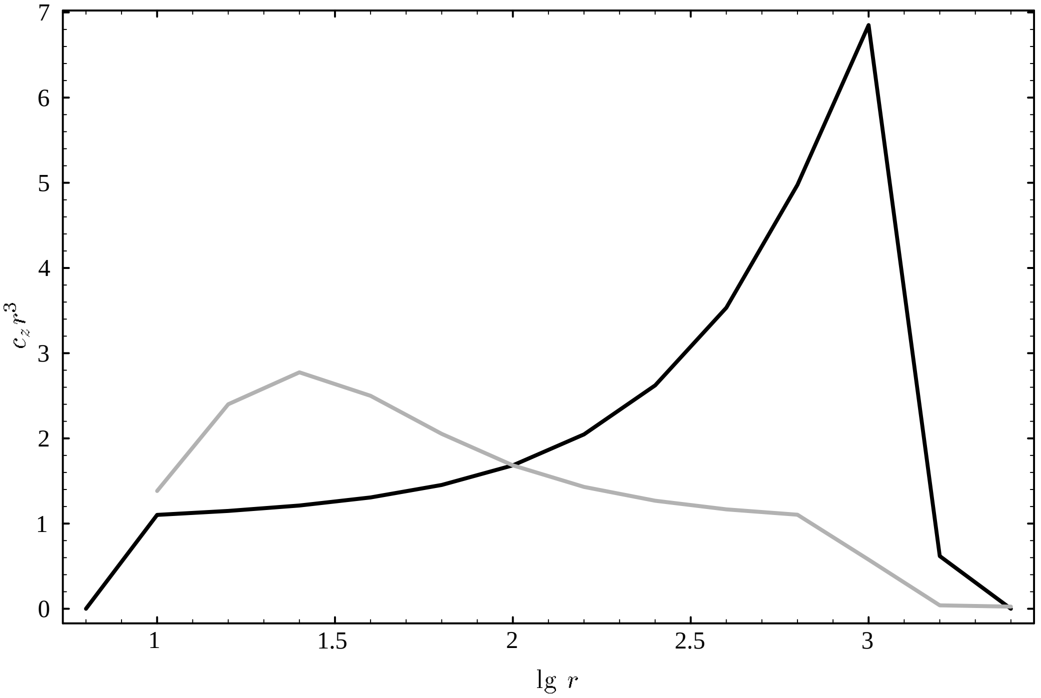

Abbildung 3.7: Korrekturfaktor c_z^{Φ} (3.46) für $\aleph = 3$ und $z = 0.1r$ (schwarze Linie) bzw. $z = 10$ (graue Linie) über einer Scheibe von $10 \leq r \leq 1000$ (log.-lin. Darstellung).

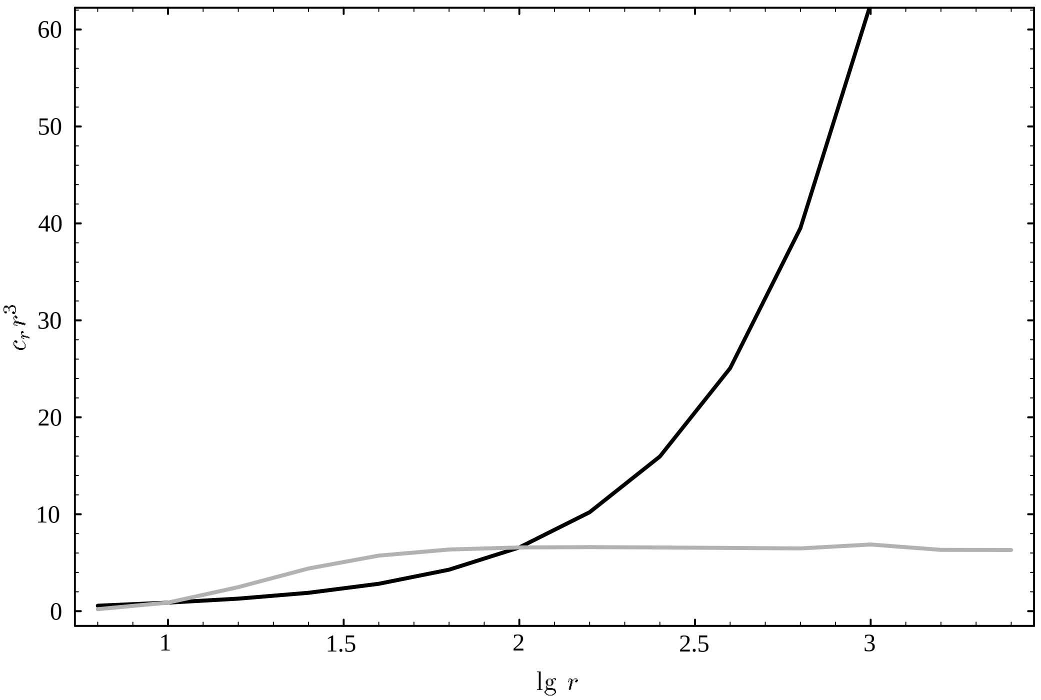

Abbildung 3.8: Korrekturfaktor c_r^{Φ} (3.47) für $\aleph = 3$ und $z = 0.1r$ (schwarze Linie) bzw. $z = 10$ (graue Linie) über einer Scheibe von $10 \leq r \leq 1000$ (log.-lin. Darstellung).

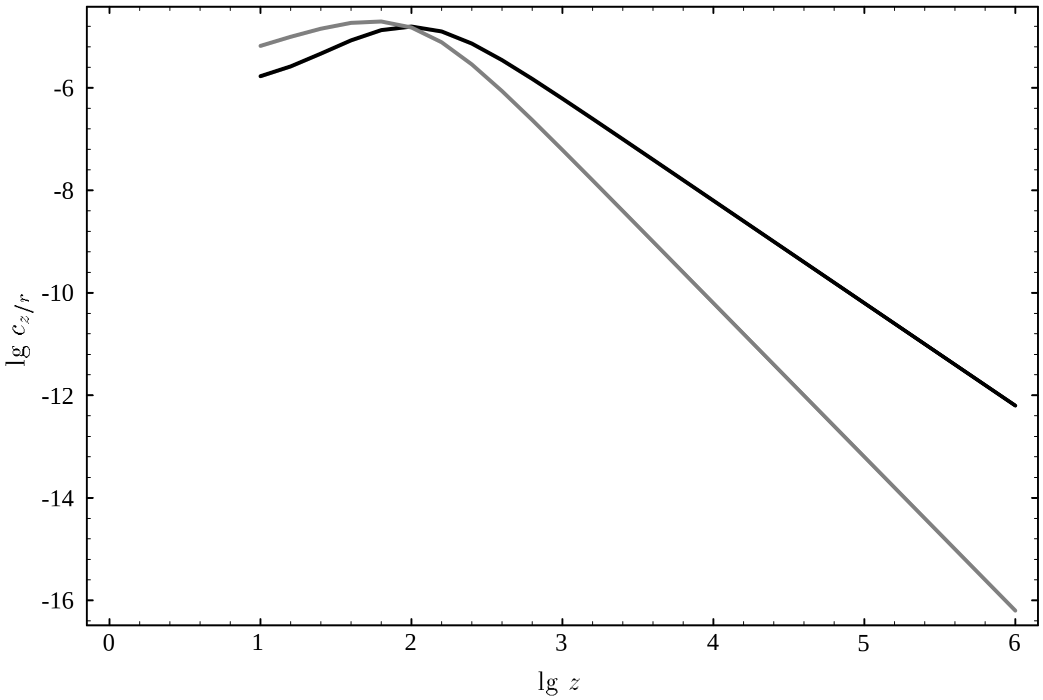

Abbildung 3.9: Korrekturfaktoren (3.46, 3.47) c_z^{Φ} (schwarz) und c_r^{Φ} (grau) für $\aleph = 3$ und $r = 100$ über einer Scheibe von $10 < r < 1000$.

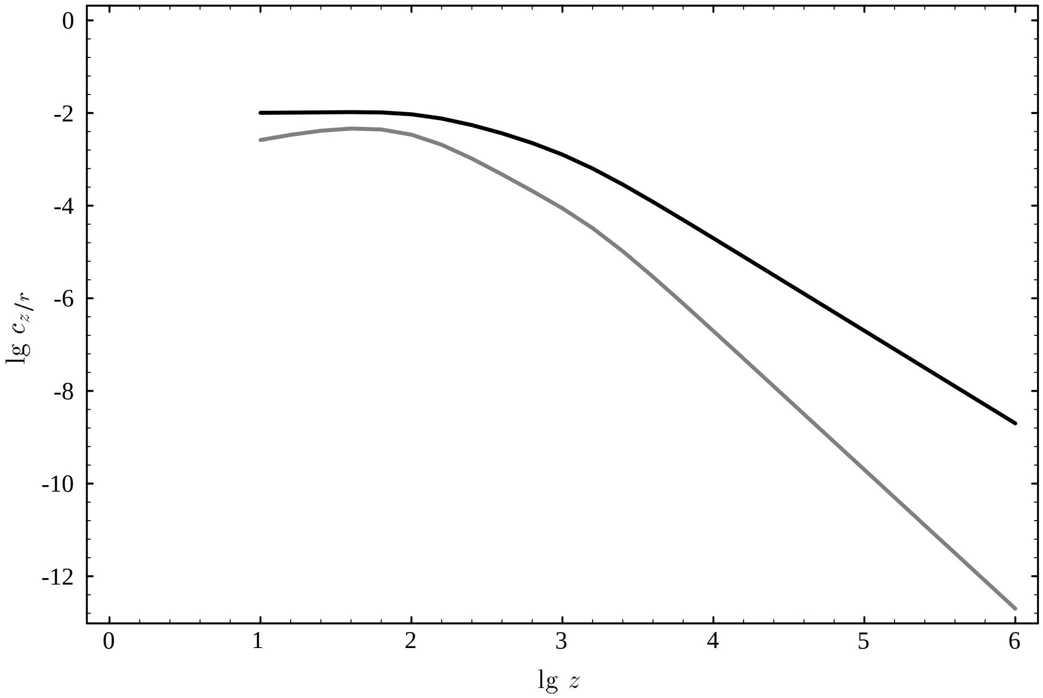

Abbildung 3.10: Korrekturfaktoren (3.46, 3.47) c_z^{Φ} (schwarz) und c_r^{Φ} (grau) für $\aleph = 1$ und $r = 100$ über einer Scheibe von $10 < r < 1000$.

um dann wieder stark abzufallen. Dieses Verhalten leuchtet sofort ein, da ein Absorber direkt über der Scheibe eine quasi unendlich ausgedehnte Scheibe sieht. Nahe über der Scheibe kommt der Hauptteil der Strahlung nur aus einem eng begrenzten Gebiet, wir können das dadurch annähern, daß die empfangene Strahlung immer unter einem festem Raumwinkel gesehen wird. Die Fläche, die von dem Absorber gesehen wird, nimmt dann ebenfalls mit der zweiten Potenz des Abstandes zu. Irgendwann rückt bei einer endlichen Scheibe aber der Rand der Scheibe ins Blickfeld, so daß der Raumwinkel unter dem die Scheibe gesehen wird nicht mehr konstant sein kann, sondern immer kleiner werden muß - die Scheibe verhält sich bei großen Abständen (groß gegen die Dimension der Scheibe) wie eine Punktquelle.

Interessant wird das Ganze, wenn man den Anstieg und das Maximum beim Fall $\aleph = 3$ erklären will. Hier spielt nämlich der Temperaturverlauf die entscheidende Rolle. Wenn der Abstand so groß geworden ist, daß der Temperaturunterschied merklich wird, aber die Scheibendimension noch keine Rolle spielt, ändert sich die mittlere Temperatur der betrachteten Fläche. Da immer mehr heißere Bereiche in den Blick genommen werden, steigt der Mittelwert, wenn ungtefähr $\aleph > 1$. Der Unterschied im vertikalen Anstieg im Fall $\aleph = 1$ und $\aleph = 3$ (Abb.3.9 und Abb.3.9) macht das deutlich. Etwas reduziert wird dieser Effekt dadurch, daß die heißeren Bereiche auf weiter innen liegenden Ringen der Scheibe liegen und die emittierende Fläche somit kleiner wird. Trotzdem wird das Maximum genau dann erreicht, wenn auch der heißeste Bereich in das Gesichtsfeld gerückt ist. Danach wird wieder der kleiner werdende Öffnungswinkel wirksam.

Eine andere Auswirkung der Scheibengeometrie, die bei der Interpretation der Bilder zu berücksichtigen ist, erkennt man sehr deutlich an Abb.3.11 und Abb.3.12, wo der Beitrag der Scheibe bei jedem Radius zum Integranden aufgetragen ist. Das Maximum des Beitrags, bzw. die Nullstelle wandern durch die Kreisform der Linien konstanter Emission mit höherem Abstand von der Scheibe zu immer größeren Radien.

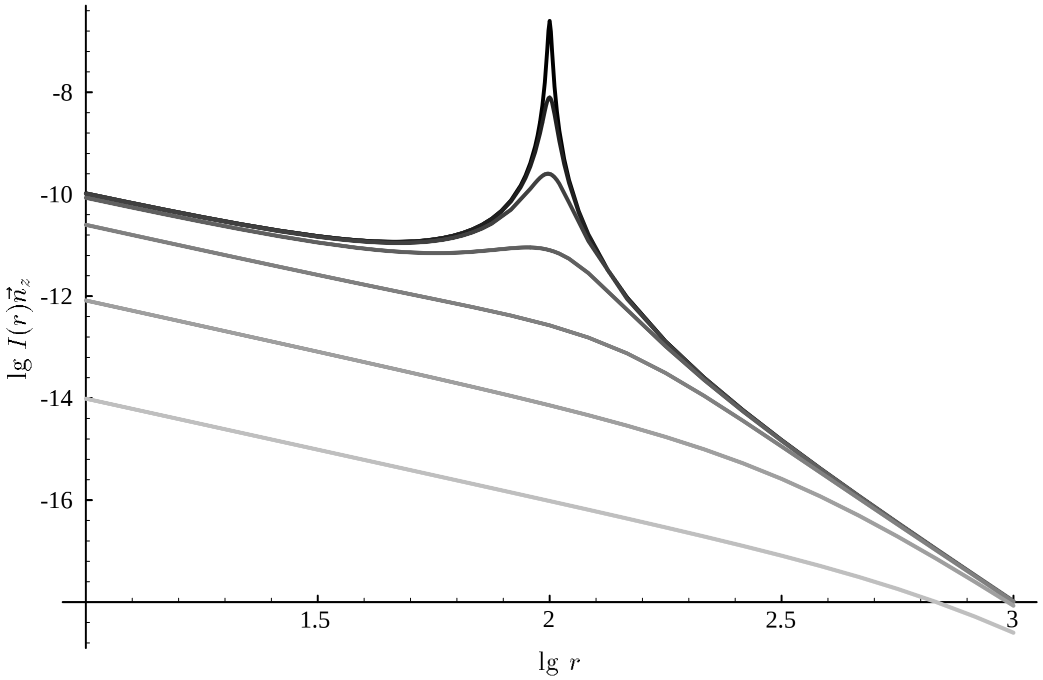

Abbildung 3.11: Beitrag der Intensität auf der Scheibe für verschiedene Radien zur Strahlungskraft in z-Richtung. Aufgetragen ist die z-Komponente des Integranden in (3.45) gegen den Scheibenradius der Emission. Der Absorber sitzt beim Radius $r = 100$ und verschiedenen Abständen $z = 10^{0..3;0.5}$ (dunkel → hell).

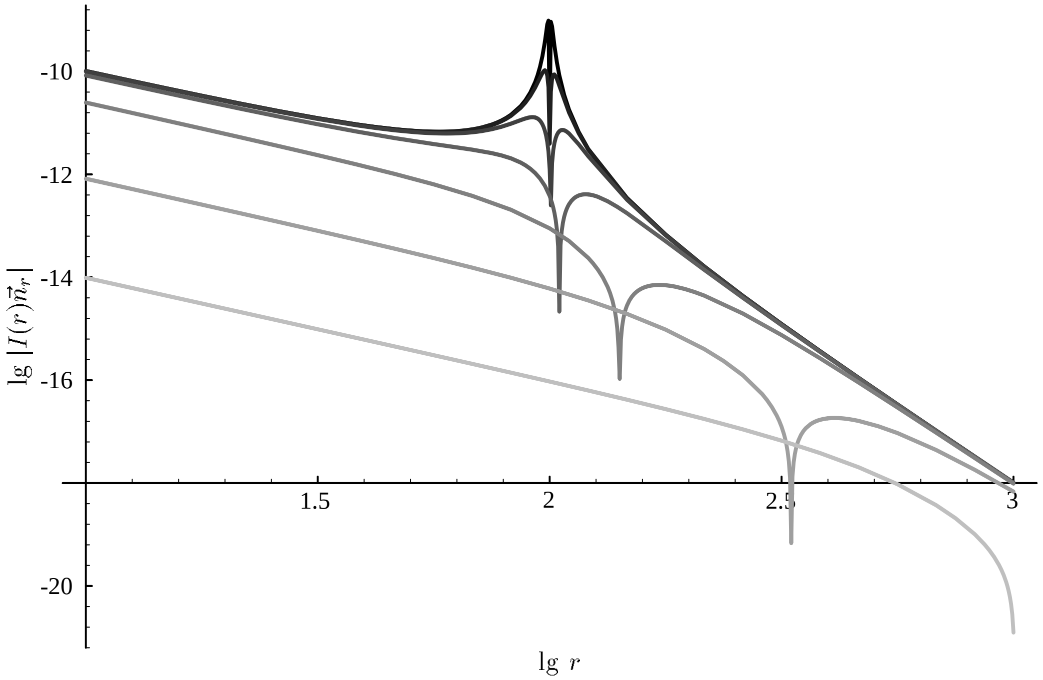

Abbildung 3.12: Beitrag der Intensität auf der Scheibe für verschiedene Radien zur Strahlungskraft in r-Richtung. Aufgetragen ist der *Absolutbetrag* der r-Komponente des Integranden in (3.45) gegen den Scheibenradius der Emission. Der Absorber sitzt beim Radius $r = 100$ und verschiedenen Abständen $z = 10^{0..3;0.5}$ (dunkel $\rightarrow$ hell).

Zum Schluß dieses Abschnittes sei noch auf den radialen Verlauf der radialen Beschleunigung hingewiesen. Diese ist nämlich in fast allen Bereichen der Scheibe nach *außen* gerichtet, was durch die Temperaturverteilung bedingt ist. Was Jet-ähnliche Ströme entlang der z-Achse angeht, so hat die Strahlungskraft eher defokussierende Wirkung, als fokussierende, es sei denn, die Scheibengeometrie wird extrem anders gewählt. Diese defokussierende Wirkung nimmt mit zunehmendem Radius zu. Zwar fällt die radiale Beschleunigung mit zunehmendem Radius und bei geringer Höhe stark ab (Abb.3.4), aber vergleicht man diese mit der vertikalen Beschleunigung, welche im Großen und Ganzen konstant ist, dann liegt der Maximalwert des Verhältnisses g_r/g_z bei $z \approx r$ und großen Radien. Hier spielt eine Rolle, daß bei einer Position am Rand der Scheibe, die hoch genug ist, um die gesamte Scheibe zu überblicken, diese fast vollständig von einer Seite, und zwar nach außen, drückt, während weiter Innen noch ein Gegendruck von den äußeren Scheibenbereichen hinzu kommt.

3.3 Die Bewegung von Testteilchen über der Scheibe

Der erste Schritt, um die Auswirkungen des Strahlungsdruckes über einer Akkretionsscheibe zu studieren, ist die Bahnen von Testteilchen auszurechnen. Dazu bietet sich an, ein Elektron auf die Scheibe zu setzten und seine Bahn mit Newtonschen Bewegungsgleichungen, lediglich unter Berücksichtigung von Gravitationskraft und Thomsondruck, zu beschreiben. Dadurch lassen sich ohne komplizierte hydrodynamische Rechnungen erste Aussagen darüber machen, ob und in welchem Bereich ein Wind überhaupt möglich ist. Für spätere Wind-Rechnungen ergeben sich unter Umständen Hinweise darauf, welche geometrische Struktur der Wind haben könnte und inwieweit man diese bei den Rechnungen berücksichtigen kann.

3.3.1 Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld einer Punktmasse

Die Gravitationsbeschleunigung

Der einfachste Fall eines Gravitationspotentials ist der einer zentralen Punktmasse. Für AGN entspricht dies der Vorstellung, daß in der Mitte der Scheibe ein massereiches schwarzes Loch mit einer Masse von $M = m_9 10^9 M_\odot$ sitzt, welches das Gravitationspotential dominiert. Der Beitrag der Scheibe zur Massenanziehung kann dann im Bereich innerhalb eines Radius r_{sg}, ab dem die Scheibe selbstgravitierend wird, völlig vernachlässigt werden. Bei Standard-α-Scheiben ist dieser Radius in natürlichen Einheiten durch

$$r_{sg} = 2150 \left(\frac{\alpha}{m_9} \right)^{\frac{2}{9}} \dot{m}^{\frac{4}{9}} \tag{3.60}$$

gegeben [Laor und Netzer 1989]. Dies liegt im allgemeinen in einem Bereich, in dem die Temperatur schon so weit abgefallen, ist, daß von dort sowieso keine starke Strahlungskraft mehr zu erwarten ist.

Die Beschleunigung $-\vec{g}_{grav}$[7] im Abstand D vom Scheibenmittelpunkt durch Massenanziehung ist dann einfach das bekannte Newtonsche Gravitationsgesetz

$$g_{grav} = \frac{GM}{D^2}. \tag{3.61}$$

In Zylinderkoordinaten ist der Abstand eines Punktes (r, ϕ, z)

$$Dist = \sqrt{r^2 + z^2} \tag{3.62}$$

Man kann nun ein Kräfteparallelogram aufspannen, bei dem $\vec{g}_{grav}$ einen Winkel Θ mit der x/y-Ebene einschließt und eine Seite ($g_z = g_{grav} \sin\Theta$) parallel zur z-Achse und die andere ($g_r = g_{grav} \cos\Theta$) parallel zur x/y-Ebene ist. Dieses rechtwinkelige Dreieck ist ähnlich zu dem Dreieck mit den Seiten r,z,D, so daß $\cos\Theta = r/D$ und $\sin\Theta = z/D$ ist. In dimensionslosen Einheiten ist somit

$$g_z = \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.63}$$

$$g_r = \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.64}$$

Unser Testteilchen startet von einer rotierenden Scheibe und wird somit auch einen spezifischem Drehimpuls a haben, so daß wir (3.64) um die Zentrifugalkräfte erweitern müssen.

$$g_r = -\frac{a^2}{r^3} + \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.65}$$

Man sieht, daß die Beschleunigung in z-Richtung entlang einer Bahn senkrecht von der Scheibe weg (r=const) zuerst linear mit z von Null bis auf einen maximalen Wert bei $z = \frac{1}{\sqrt{2}} r$ ansteigt und erst dann langsam wieder in den z^{-2} Fall übergeht. Dies ist der erste entscheidende Unterschied zu der Situation bei Sternen, bei denen die Gravitationskraft von Anfang an mit r^{-2} abfällt. Wenn wir uns an den Strahlungsdruck über einer Akkretionsscheibe erinnern (3.46, 3.47), dann sehen wir aus Abb.3.9,3.3+3.4, daß dieser zu Beginn konstant ist, dann ansteigt, um schließlich ebenfalls in ein z^{-2} Gesetz überzugehen. Für kleine z wird der Strahlungsdruck immer überwiegen, für große Abstände hängt dies von der Leuchtkraft der Scheibe ab.

[7] Aus Gründen der Übersichtlichkeit bei den Windrechnungen, ist g_{grav} positiv definiert.

3.3.2 Bahnen bei Drehimpulserhaltung

Bei Standard-Akkretionsscheiben geht man davon aus, daß das Gas bei jedem Radius ungefähr mit Keplergeschwindigkeit um das schwarze Loch rotiert. Ein Teilchen das auf der Scheibe liegt wird dann zwangsläufig wohl die gleiche Geschwindigkeit und damit auch den selben Drehimpuls haben. Eine Tatsache, die in vielen Scheibenwindmodellen geflissentlich ignoriert wird [Icke 1977, Icke 1980, Icke 1989, Icke und Eulderink 1986, Vitello und Shlosman 1988, Shlosman *et al* 1985, Meier 1979a, Fukue 1989]. Ohne einen zusätzlichen Drehimpulstransportmechanismus im Wind wird a aber entlang einer Bahn erhalten bleiben, was die großskalige Struktur dieser Bahn entscheidend beeinflußt.

Nimmt man z.B. an, daß eine zusätzliche Kraft, z.B. der Strahlungsdruck, auf ein rotierendes Testteilchen nur in z-Richtung wirkt, und die Rotationsebene auf einer Ebene parallel zur x/y-Ebene oberhalb der Scheibe hebt, dann ist die Bahn des Teilchens im z/r-Diagramm weiterhin alleine durch das Gleichgewicht von Zentrifugal- und Zentripetalkraft gegeben.

Betrachten wir die Gleichgewichtsbahn eines solchen, radial kräftefreien ($g_r = 0$), Teilchens beim Radius r_0. Dessen spezifischer Drehimpuls ist durch die Keplerrotation (2.3) festgelegt.

$$a = r_0 v_\phi = \omega {r_0}^2 = \sqrt{r_0} \tag{3.66}$$

Die Gleichgewichtsbedingung (3.65), die alleine die Geometrie der Bahn bestimmt lautet

$$\frac{a^2}{r^3} = \frac{r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.67}$$

Ein Anheben des Teilchens bedeutet eine Verringerung der radialen Gravitationsanziehung und damit bei gleichem spezifischem Drehimpuls a eine Vergrößerung des Bahnradius. Analytisch erhält man die genaue Bahn, wenn man Gl. 3.67 nach z auflöst.

$$z = r\sqrt{\frac{r^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} - 1} \tag{3.68}$$

Setzten wir den konkreten Ausdruck für den Drehimpuls ein:

$$\Rightarrow z = r\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} \tag{3.69}$$

Im Grenzfall $r \to \infty$ ist $z = r^{\frac{4}{3}}/r_0^{\frac{1}{3}}$ und wir sehen, daß alle Bahnen in eine leicht hyperbelförmige Bahn übergehen. Man darf sich dabei nicht von der doppelt-logarithmischen Darstellung in Abb.3.13 verwirren lassen. Hinzu kommt auch noch, was in dieser Darstellung ebenfalls nicht sichtbar wird, die Rotation des Teilchens, die aber vom Verhältnis der Zeitskalen von ϕ- und z-Beschleunigung abhängt.

Was wir auf jeden Fall schon an dieser simplen Überlegung sehen, ist, daß eine enorm starke und zum Zentrum gerichtete Radialbeschleunigung vorhanden sein muß, die entweder gekoppelt ist mit einem effektiven Drehimpulstransportmechanisums oder extrem reichweitig ist, damit ein kollimierter Ausfluß von der Scheibe möglich ist. Wir wissen aber schon, daß der Strahlungsdruck einer Scheibe im Gegensatz dazu in erster Linie nach außen gerichtet ist Abb.3.4. Im Allgemeinen werden also rein strahlungsgetriebene Scheibenwinde alles andere als einen zur Scheibenachse kollimierten Wind (Jet) produzieren, eher das Gegenteil scheint wahrscheinlich, nämlich einen leicht zur Scheibenebene geneigter Wind (Torus).

3.3.3 Teilchenbahnen bei Thomsondruck

Als nächstes fügen wir unseren Betrachtungen der Testteilchenbahnen die Ergebnisse unserer Untersuchung des Thomsondruckes über einer Scheibe bei. Schon

[Bisnovatyi-Kogan und Blinnikov 1977] hatten diesen Druck und die dazugehörenden Teilchenbahnen mit Drehimpuls berechnet. Gleichzeitig stellten sie fest, daß der Strahlungsdruck nicht die Form eines Potentials hat, sondern nur durch ein Pseudopotential U_{rad} mit $m\vec{g}_{rad} = -r^2/\sqrt{r^2+z^2}\vec{\nabla}U_{rad}$ dargestellt werden kann. Die Überlagerung des Gravitationspotentials und des Pseudopotentials der Strahlung kann also nicht zu einem Gleichgewicht führen, sondern das Teilchen wird sich fortwährend bewegen[8].

Auch [Icke 1980, Icke 1977] hat solche Teilchenbahnen berechnet, läßt aber den Drehimpuls unberücksichtigt und erweitert diese in nachfolgenden Arbeiten [Icke und Eulderink 1986, Icke 1989] auf den Fall der Beschleunigung relativistischer Wolken und Teilchen, was wir in dieser Arbeit nicht tun werden.

Bewegungsgleichungen

Wir schreiben die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$g_r = g_r^{rad} - g_r^{grav} \tag{3.70}$$

$$g_z = g_z^{rad} - g_z^{grav} \tag{3.71}$$

für diesen Fall in Zylinderkordinaten (Kap.4.1.1 (4.4)).

$$\ddot{r} = g_r^{rad} - \frac{r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + r\dot{\phi}^2 \tag{3.72}$$

$$\ddot{z} = g_z^{rad} - \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.73}$$

Die Strahlungsdruckterme sind für die verschiedene einfache Modelle durch (3.46,3.47) gegeben. Um die Situation aber realistischer zu machen verwenden wir die volle Gleichung (3.28) mit einem limb–darkening Term (3.4) und einem radialen Temperatur Gesetz, das der relativistischen Scheibentheorie entnommen ist (2.88,$r \rightarrow r_d$).

$$g^{Th} = \frac{3\kappa^{Th} z\dot{m}}{8\pi^2(1+a_{ld})\,c}\int_{r_{in}}^{r_{out}}\int_0^{2\pi}\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{B}\sqrt{\mathcal{C}}}\frac{\left(1+\frac{a_{ld}z}{\sqrt{r^2+r_d{}^2+z^2-2rr_d\cos\phi_d}}\right)d\phi_d\;dr_d}{r_d{}^2(r^2+r_d{}^2+z^2-2rr_d\cos\phi_d)^2}\begin{pmatrix} r-r_d\cos\phi_d \\ -r_d\sin\phi_d \\ z\end{pmatrix} \tag{3.74}$$

Ergebnisse

Die Bewegungsgleichungen, einschließlich der Berechnug des Strahlungstermes wurden mit dem Programm HFAWIND berechnet, das auch für die Windrechnungen benutzt wurde, und am Ende der Arbeit kurz vorgestellt wird.

Die hier präsentierten Ergebnisse haben allerdings ein konzeptuelles Problem, denn alle Gleichungen wurden bisher für dünne Scheiben hergeleitet. Damit sich Thomson-getriebene Teilchen aber nennenswert von der Scheibe entfernen, muß die Akkretionsrate so hoch sein, daß die Näherungen für dünne Scheiben nicht mehr gelten. Wir tun deshalb so, als wüßten wir das nicht.

Mit diesen Bewegungsgleichungen wurden drei verschiedene Szenarien für ein Schwarzschild Loch mit ($m_9 = 0.1, r_{in} = 6, r_{out} = 2150$) und verschiedenen Startradien (r=20,40,60,80,100,200,500) gerechnet. In der ersten Rechnung war $\dot{m}_0 = 1$. Das Teilchen startete jeweils bei der Skalenhöhe der Scheibe und einer Geschwindigkeit nur in z-Richtung, die der thermischen Geschwindigkeit bei der lokalen Effektivtemperatur entsprach. Keines dieser Teilchen konnte dem Gravitationsfeld der Zentralmasse entkommen.

Drei typische Bahnen mit den dazugehörenden Geschwindigkeiten sind in Abb.3.14 bzw. Abb.3.15 dargestellt. Man sieht, daß im inneren Bereich die Bahnen mehr oder weniger

[8] In der Akkretionsscheibentheorie kommt es nur deswegen zu einem Gleichgewicht zwischen Strahlungsdruck und Gravitation, weil die Gleichungen auf die Vertikale beschränkt sind.

chaotisch zu verlaufen scheinen, während sich weiter außen eine quasi periodische Bahn einstellt; allerdings kommt es zu keinem Gleichgewichtszustand, was die Aussage über das Verhalten im Pseudopotential bestätigt.

Wie wichtig die Starthöhe ist, sieht man an der nächsten Rechnung Abb.3.16. Dort wurden die gleichen Bahnen gerechnet wie zuvor, jedoch mit dem Unterschied, daß jetzt die Starthöhe jeweils auf ein Zehntel des Startradius gesetzt wurde. In den äußeren Bereichen werden die Bahnen deutlich weiter und chaotischer als in Abb.3.14 und im innersten Bereich können Teilchen sogar die Fluchtgeschwindigkeit erreichen. Dies ist dadurch zu begründen, daß die Beschleunigung in einem sehr kleinen Bereich über der Scheibe stattfindet. Je länger das Teilchen sich in diesem Bereich aufhält, desto stärker wird es beschleunigt. Allerdings ist hier nicht berücksichtigt, daß sich das Teilchen bei den hohen Akkretionsraten längst innerhalb der Scheibe befinden würde.

Vergrößern wir nun aber die Akkretionsrate auf das Dreifache ($\dot{m}_0$=3), dann gelangen wir endlich in den Bereich, ab dem auch ein Teilchen, daß sich über der dick gewordenen Scheibe befindet so stark beschleunigt wird, daß es wegfliegt (Abb.3.17 und Abb.3.18).

Wir sehen an diesen Rechnungen Zweierlei. Zum einen ist unsere Skalierung der Akkretionsrate sinnvoll gewählt, denn sobald $\dot{m}_0$ in der Größenordnung von 1 liegt, wird in einem weiten Bereich über der Scheibe auch lokal der Strahlungsdruck so groß, daß die akkretierten Teilchen wieder weggedrückt werden. Dies gilt allerdings nicht mehr für den äußeren Bereich, hier bleiben die Teilchen auch bei höheren Akkretionsraten gebunden.

Zum anderen sehen wir, daß die Überlegungen zu der Bahnform zutreffen, die Teilchen werden nach außen gedrückt und es kommt zu keiner Fokussierung zur z-Achse[9].

3.4 Heizung durch das Scheibenspektrum

Neben dem Strahlungsdruck bewirkt eine leuchtende Scheibe auch noch eine Heizung des bestrahlten Gases über derselben. Um diese zu erhalten, berechnen wir zunächst das Spektrum, was an verschiedenen Orten über der Scheibe herrscht.

3.4.1 Berechnung des Scheibenspektrums

Die primitivste Methode, ein solches zu berechnen, besteht darin, die Scheibe lokal als Schwarzkörper zu betrachten, dessen Effektivtemperatur durch die Dissipationsrate (2.95) gegeben ist. Diese Methode ist deshalb sehr vereinfachend, weil beim Strahlungstransport in der Scheibe das Spektrum eigentlich modifiziert wird. Wir nehmen diese Ungenauigkeit aber mißbilligend in Kauf.

Das Spektrum an einem Punkt über der Scheibe erhalten wir durch Integration der Planckfunktion B_ν (3.37) über alle Raumwinkel $F_\nu = \int B_\nu d\Omega$. Dieses Integral transformieren wir mittels (3.9) auf die Scheibenkoordinaten (r_d, ϕ_d) und führen die Integration aus, wobei wir die Hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ [Abramowitz und Stegun 1972, (15.1.1)] erhalten.

$$F_\nu(r,z) = \frac{4\,\pi\,h\,\nu^3\,z}{c^2} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{2\,\pi\,r_d\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4},1,\frac{4\,r^2\,r_d{}^2}{(r^2+r_d{}^2+z^2)^2}\right)}{\left(e^{\frac{h\,\nu}{k_B\,T_{\mathit{eff}}(r_d)}}-1\right)\left(r^2+r_d{}^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr_d \tag{3.75}$$

Mit diesem Integral können wir nun die Form des Spektrums an jeder Stelle über der Scheibe berechnen. Die Ergebnisse der Rechnung sind in Abb.3.19-Abb.3.21 dargestellt. Auch hier kommen die gleichen Effekte zum Tragen, wie bei der Berechnung des Strahlungsdruckes. Je höher man sich über der Scheibe befindet, desto mehr sieht man auch von ihr. Bei niedrigem z erhalten wir deshalb ein Spektrum, das mehr oder weniger von zwei Komponenten dominiert wird, nämlich von der lokalen Schwarzkörperstrahlung und der Strahlung des innersten, heißen Bereich. Mit zunehmender Höhe ergibt sich mehr und mehr eine Überlagerung von vielen

[9] Die Anwesenheit von Magnetfeldern könnte das natürlich deutlich ändern.

Schwarzkörperspektren und der Gesamtfluß steigt, bis der endliche Öffnungswinkel der Scheibe eine Rolle spielt, der Fluß wieder abnimmt und das Spektrum seine typische Form erhält.

Natürlich darf man den Wert dieser Spektren, wie schon erwähnt, nicht überschätzen, denn einige wichtige Aspekte wurden außer acht gelassen, wie z.B. Dopplerboosting, Opazitäten, Modifikation des BB-Spektrums, Limb-darkening etc. Wir können also höchstens von schematischen Spektren sprechen, dennoch werden auch bei genaueren Spektren die hier zu sehenden Besonderheiten zu finden sein.

3.4.2 Gleichgewichtskurven

Wir wissen nun, daß über der Scheibe ein unter Umständen sehr intensives Strahlungsfeld herrscht und können dessen ungefähres Spektrum angeben. Es stellt sich die Frage, wie verhält sich Gas, das einer solchen intensiven Strahlung ausgesetzt wird? Wie stark wird es geheizt und welche Temperatur hat es bei welcher Dichte? Diese Fragen können geklärt werden, wenn man sich für ein gegebenes Spektrum die Gleichgewichtskurve zwischen Heizung und Kühlung $\Gamma(n,T) - \Lambda(n,T) = 0$ anschaut. Wir vergleichen dabei zwei Extreme, nämlich die Kurven, die sich aus einem vollständigen Quasar Spektrum ergeben mit denen, die aus dem Spektrum einer simplen Akkretionsscheibe folgen.

In Abb.3.23 sind solche Gleichgewichtskurven dargestellt, die mit dem Programm von [Schmutzler 1987] gerechnet wurden. Zum Vergleich wurde dabei ein Spektrum von 3C273 verwendet, das auf verschiedene Leuchtkräfte normiert wurde. Es wurde dabei angenommen, daß sich ein Beobachter sehr nahe an einer Quelle befindet ($D = 10^{14}\mathsf{cm} \approx 1\,m_9\,\mathsf{R_g}$), die eine Leuchtkraft von $L = 10^{46,45,44}\mathsf{erg/s}$ hat. Das Spektrum am Beobachtungsort folgt dann aus der einfachen Normierung $F_\nu = L_\nu/4\pi D^2$ und ist in Abb.3.22 dargestellt.

Allerdings muß man bei der Interpretation der Ergebnisse vorsichtig sein, denn es muß ja nicht gesagt sein, daß das Spektrum, welches wir bei einem Quasar beobachten, das gleiche ist, dem ein Gas im Zentrum desselben ausgesetzt ist. Bei diesen kleinen Abständen ist eher zu vermuten, daß die einzelnen Komponente des Spektrums auch aus unterschiedlichen Regionen des Quasars kommen. Schon die Scheibenspektren sehen ja an verschiedenen Positionen unterschiedlich aus.

Dennoch sind die Kurven in Abb.3.23 insofern interessant, als das sie zur Vorsicht mahnen, wenn man die Gasdynamik im Zentrum eines AGN untersuchen will. Das Vorhandensein einer höherenergetischen Komponenten im Spektrum ändert die Gleichgewichtstemperatur bei niedrigen Dichten und die "kritische Dichte", bei der die Temperatur ansteigt, enorm, was man an Abb.3.24 sieht, wo die Gleichgewichtskurve für ein Scheibenspektrum (Abb.3.22) dargestellt ist. Der starke Anstieg auf die Comptontemperatur fehlt völlig, und die Temperatur ist über einen weiten Bereich relativ konstant, verglichen mit der 3C273 Kurve.

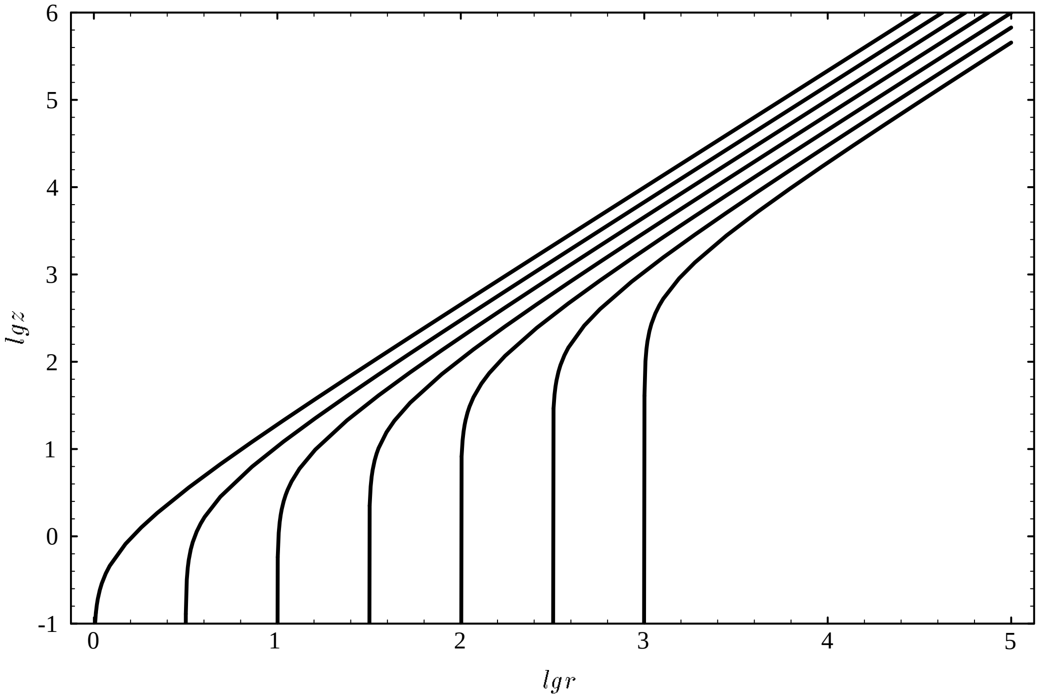

Abbildung 3.13: Doppellogarithmische Bahnen eines Testteilchens bei Drehimpulserhaltung, Keplerrotation und einer zusätzlichen Kraft in z-Richtung für verschiedene Startradien auf einer rotierenden Scheibe.

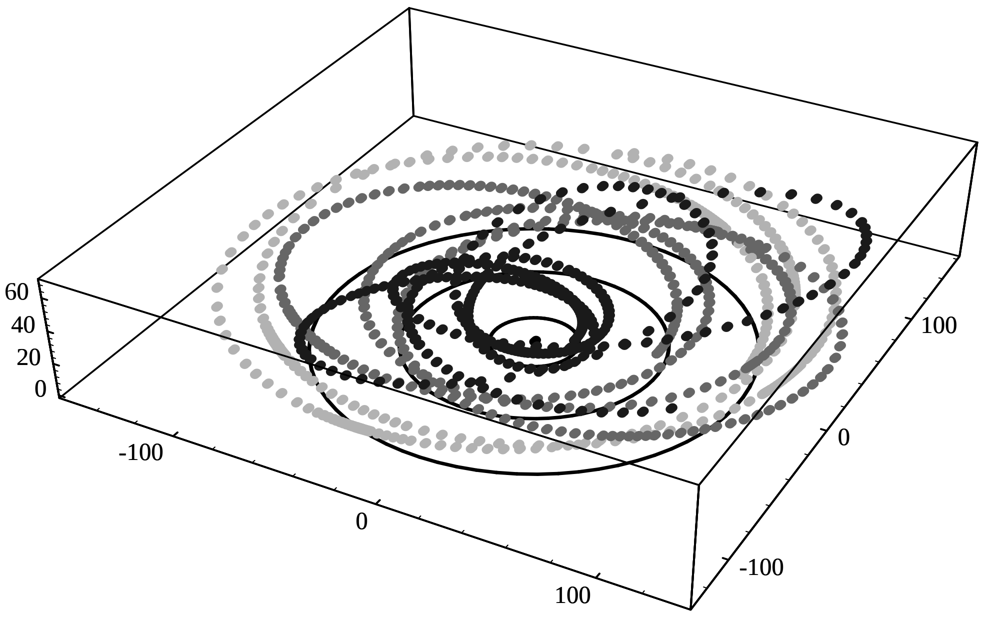

Abbildung 3.14: Räumliche Bahnen im Strahlungsfeld einer Akkretionsscheibe für Teilchen mit verschiedenen Startradien ($r = 20, 60, 100$) und entsprechenden Startpositionen ($z = 8.3, 14.9, 17.2$) bei einer Akkretionsrate von $\dot{m}_0 = 1$.

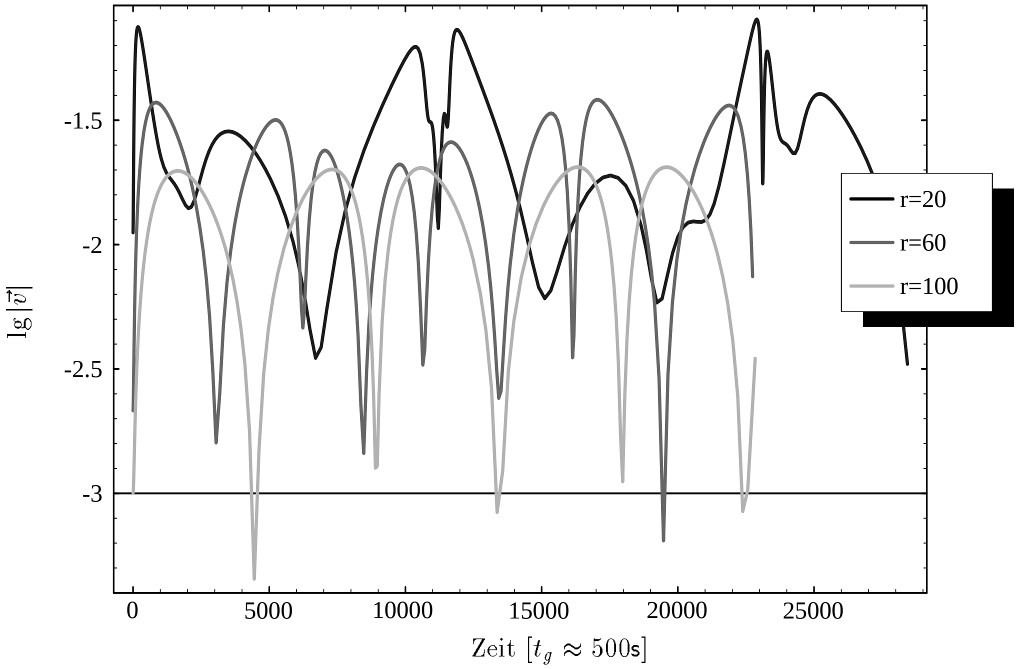

Abbildung 3.15: Geschwindigkeitsbetrag zu verschiedenen Zeiten für die Teilchen aus Abb.3.14

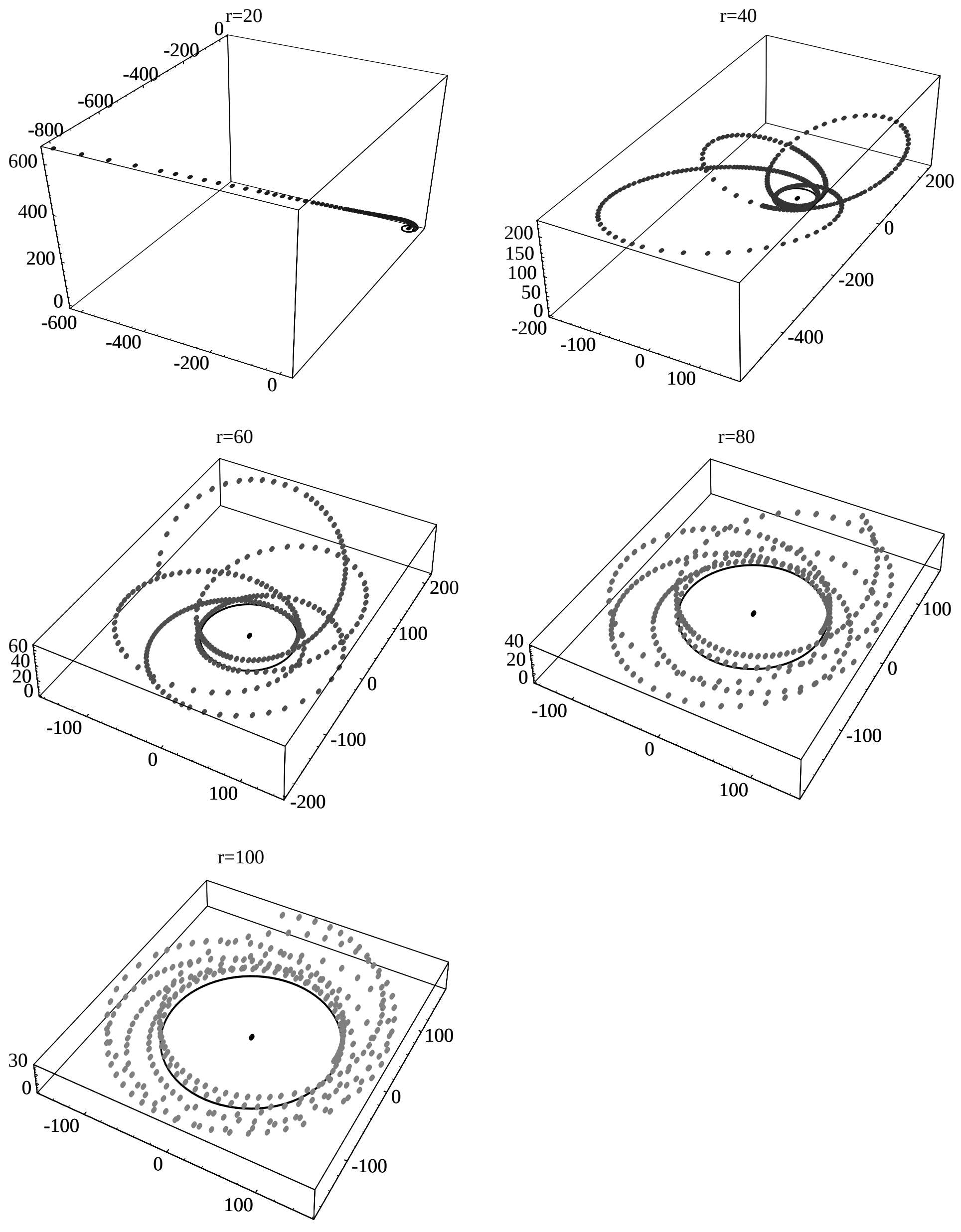

Abbildung 3.16: Räumliche Bahnen im Strahlungsfeld einer Akkretionsscheibe für Teilchen mit verschiedenen Startradien ($r = 20, 60, 100$) und Startpositionen ($z = 0.1r$) bei einer Akkretionsrate von $\dot{m}_0 = 1$.

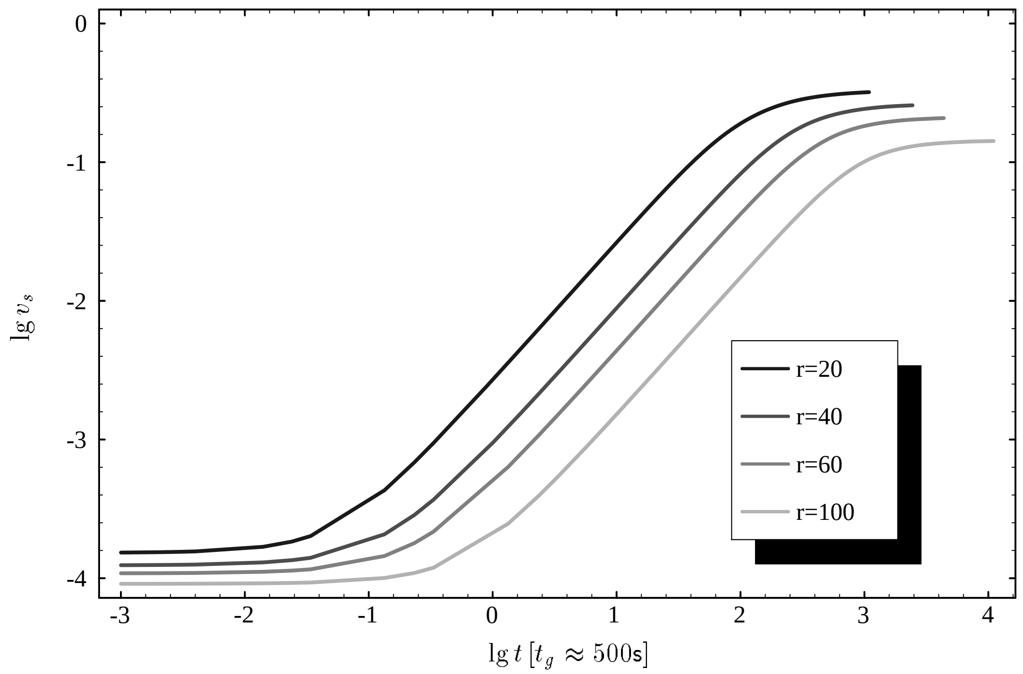

Abbildung 3.17: Geschwindigkeitsbetrag v_s entlang der Stromlinie bei einer Akkretionsrate von $\dot{m}_0 = 3$ und verschiedenen Startradien.

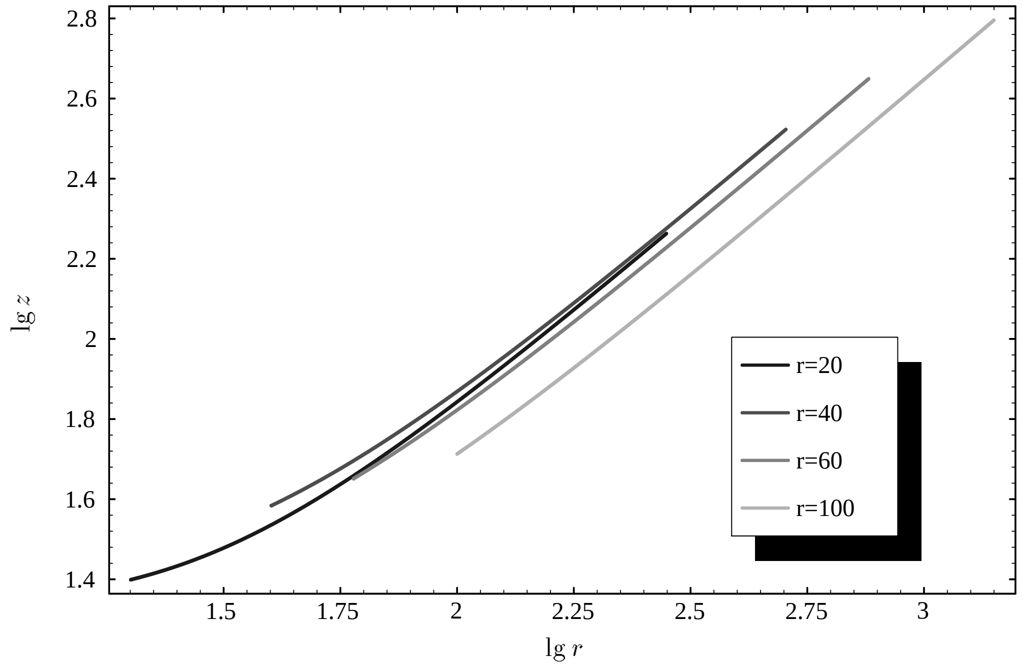

Abbildung 3.18: Teilchenbahnen in der r/z-Projektion bei einer Akkretionsrate von $\dot{m}_0 = 3$ und verschiedenen Startradien.

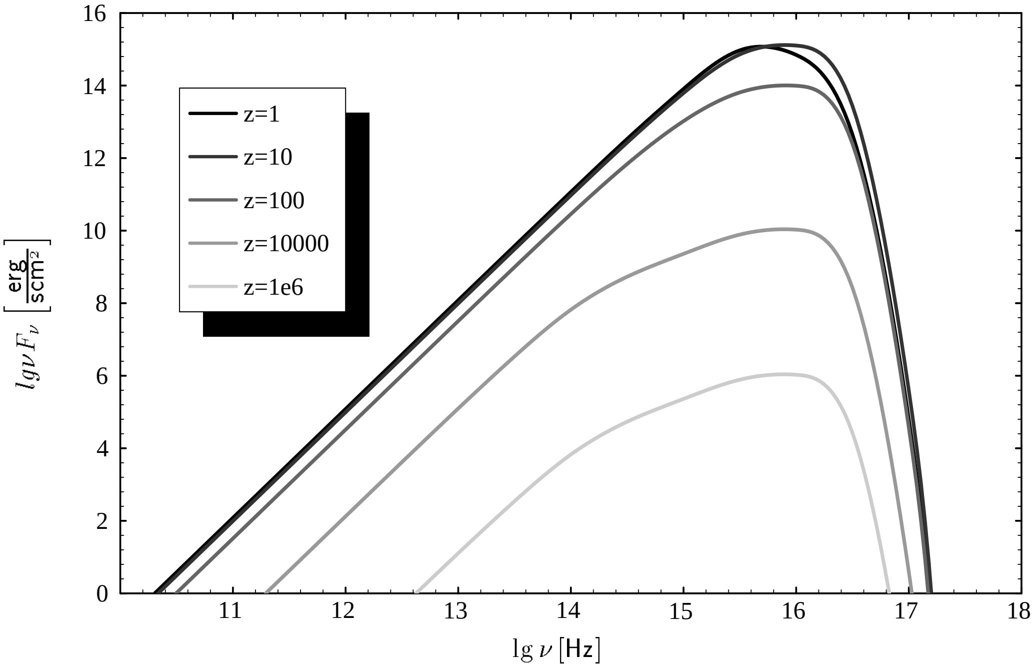

Abbildung 3.19: Spektrum einer Akkretionsscheibe ($a = 0, r_{in} = 6, r_{out} = 2000$) mit lokaler Schwarzkörperstrahlung und einem Verhältnis $\dot{m}_0/m_9 = 1$ an verschiedenen Positionen $r = 20$ und $z = (1, 10, 100, 10^4, 10^6)$ über der Scheibe.

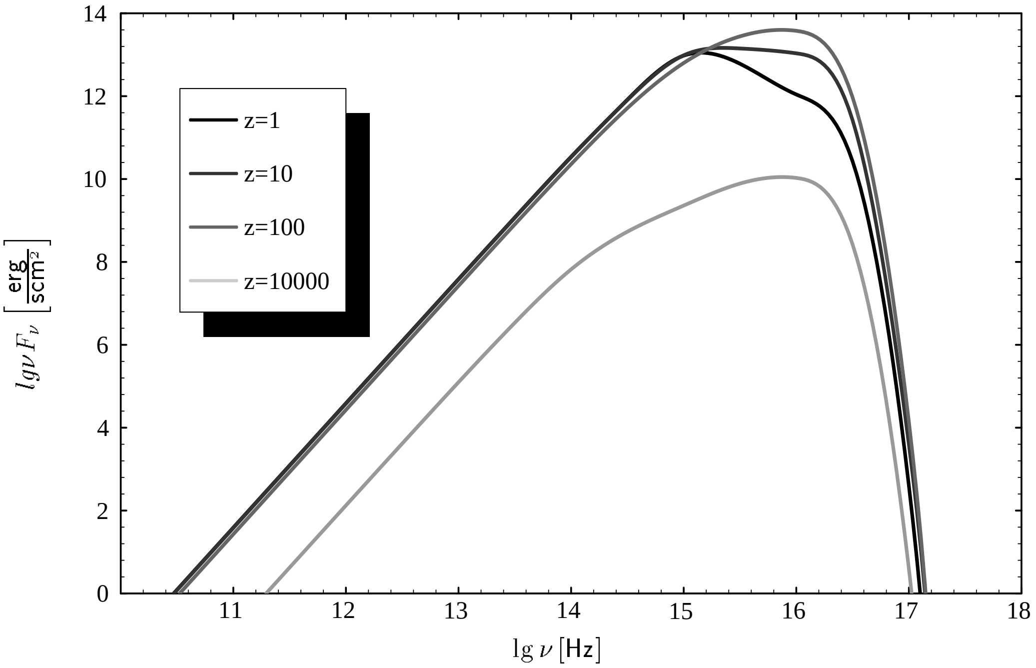

Abbildung 3.20: Spektrum einer Akkretionsscheibe ($a = 0, r_{in} = 6, r_{out} = 2000$) mit lokaler Schwarzkörperstrahlung und einem Verhältnis $\dot{m}_0/m_9 = 1$ an verschiedenen Positionen $r = 100$ und $z = (1, 10, 100, 10^4)$ über der Scheibe.

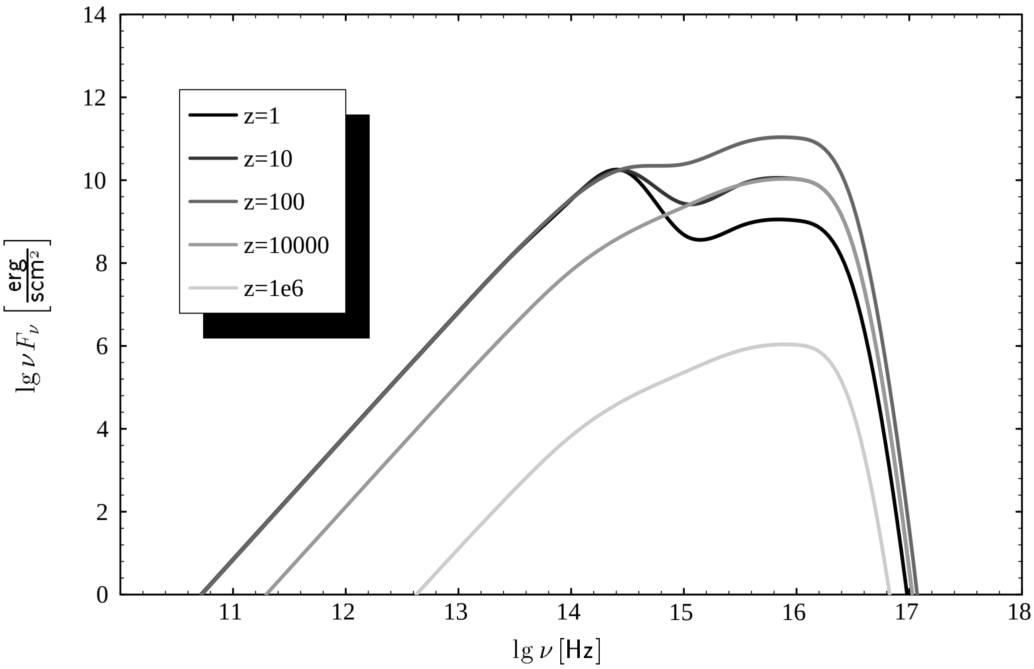

Abbildung 3.21: Spektrum einer Akkretionsscheibe ($a = 0, r_{in} = 6, r_{out} = 2000$) mit lokaler Schwarzkörperstrahlung und einem Verhältnis $\dot{m}_0/m_9 = 1$ an verschiedenen Positionen $r = 1000$ und $z = (1, 10, 100, 10^4, 10^6)$ über der Scheibe.

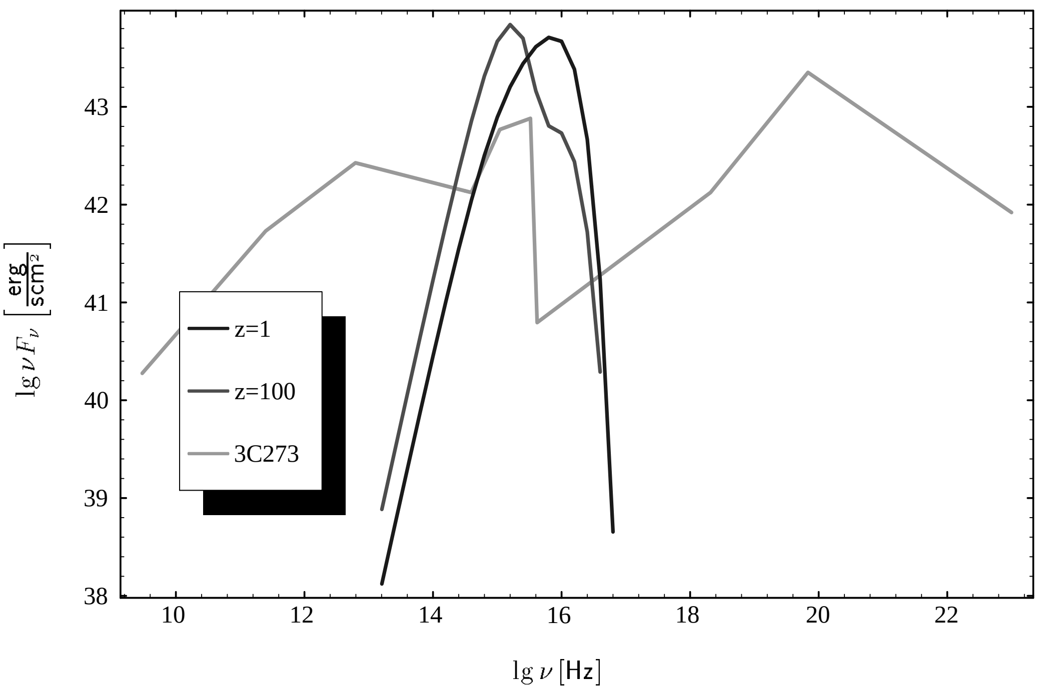

Abbildung 3.22: Das eingestrahlte schematische Spektrum von 3C273 für die Berechnung der Gleichgewichtskurven in Abb.3.23 bei einer Leuchtkraft von 10^{44}erg/s im Abstand von 10^{14}cm im Vergleich zu den beiden Scheibenspektren, die für Abb.3.24 benutzt wurden.

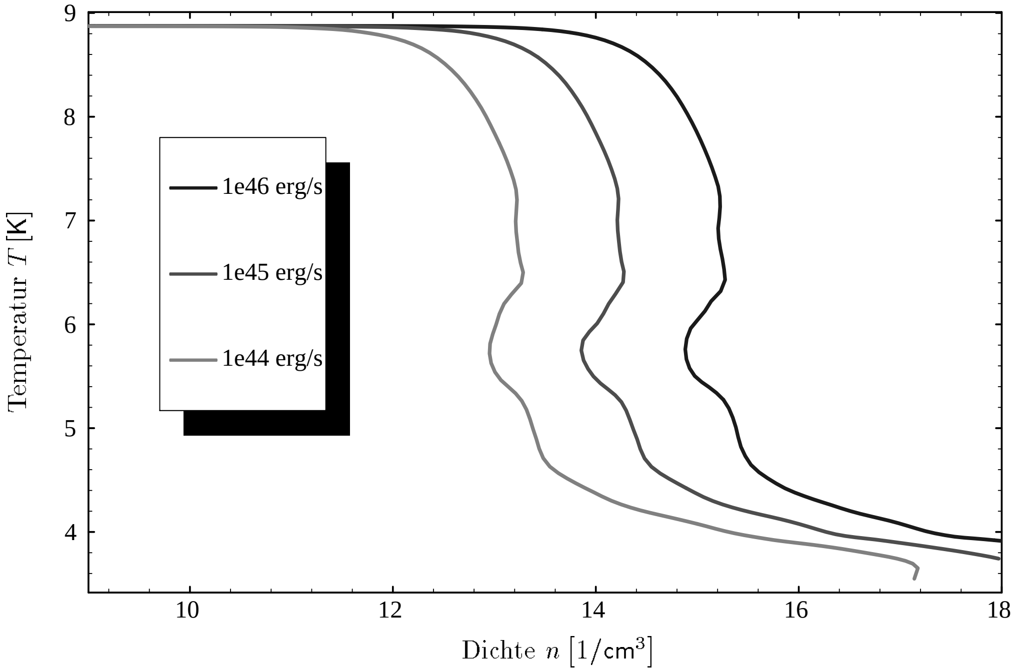

Abbildung 3.23: Gleichgewichtskurve $\Gamma - \Lambda = 0$ für ein Gas, das von einem 3C273 Spektrum im Abstand von 10^{14}cm von der Quelle bestrahlt wird und dessen Gesamtleuchkraft $L = 10^{46,45,44}$erg/s beträgt.

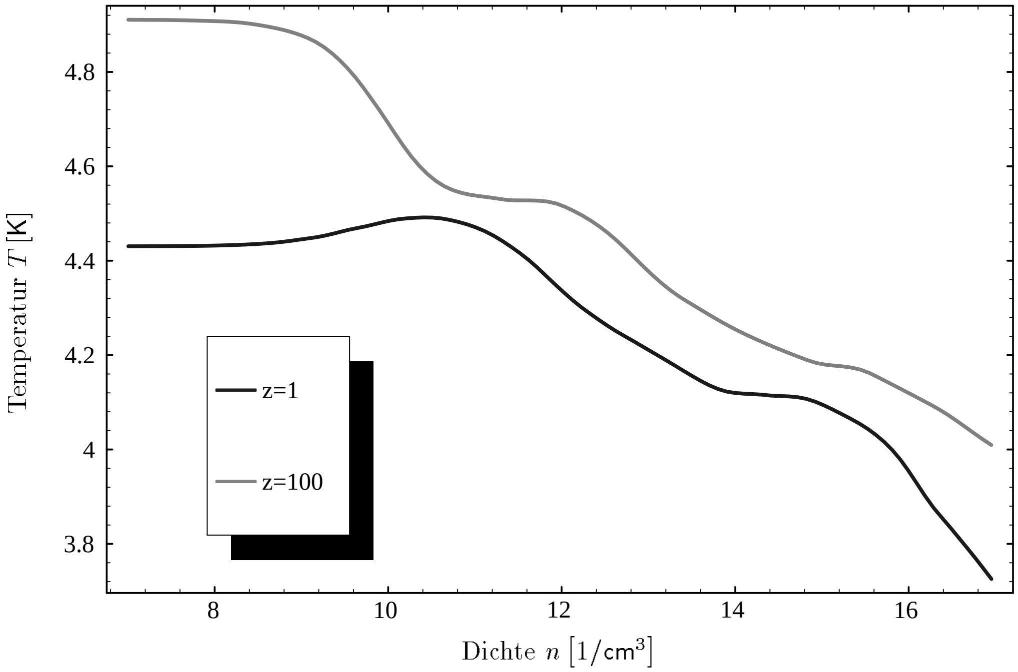

Abbildung 3.24: Gleichgewichtskurve $\Gamma - \Lambda = 0$ für ein Gas, das von einem Scheibenspektrum bestrahlt wird, bei $r = 100$ und $z = (1, 100)$ und dessen Gesamtleuchkraft so normiert ist, daß es bei $\nu \approx 10^5$ dem 3C273 Spektrum mit $L = 10^{44}$erg/s im Abstand von 10^{14}cm entspricht.

Kapitel 4

Winde in der Flußröhre

Jetzt wollen wir uns dem eigentlichen Ziel dieser Arbeit nähern und die hydrodynamischen Gleichungen untersuchen, die einen strahlungsgetriebenen Wind beschreiben.

qDas größte Problem bei solchen Scheibenwinden ist ihre Komplexität, was die Geometrie betrifft. Ist es schon bei Sternwinden nicht ganz einfach die hydrodynamischen Gleichungen zu lösen um wieviel schwerer ist dies bei Scheibenwinden, die schon im einfachsten Fall einen zweidimensionalen Charakter haben. Wir werden deshalb durch eine geschickte Wahl unseres Koordinatensystems und durch die Einführung hydrodynamischer Flußröhren die entsprechenden Gleichungen auf eine überschaubare Form bringen, die es erlaubt die Betrachtungsweise aus den eindimensionalen Rechnungen beizubehalten.

4.1 Stromlinienkoordinaten

Wenn wir den Verlauf einer Flüssigkeit betrachten, deren primäre abhängige Variable die Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$ am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t ist, dann kann diese mit drei verschiedenen Begriffen beschrieben werden. Da ist zum einen die *Pfadlinie* eines Materieelementes, die den Weg beschreibt, den das Material einschlägt, zum anderen ist die *Spur* definiert, als die Menge aller Flüssigkeitselemente, die zu einem beliebigen Zeitpunkt durch einen festen Punkt geflossen sind, was der Spur entspricht, die entsteht, wenn man an einem Punkt kontinuierlich Tinte in die Flüssigkeit träufelt. Zu guter letzt bezeichnen wir als *Stromlinie* die Kurve, deren Tangente an jedem Punkt parallel zum Geschwindigkeitsvektor verläuft. Als Strom- oder Flußröhre bezeichnet man die Gesamtheit aller Stromlinien, die durch eine geschlossene Kurve im Medium gehen. Im stationären Fall oder bei der Betrachtung isolierter Teilchen sind alle drei Definitionen identisch [Batchelor 1967, S.72].

Wir wollen uns jetzt ein Koordinatensystem definieren, das sich genau der Strömung anschmiegt, dabei soll eine Koordinate s genau entlang und eine zweite Koordinate n senkrecht zur Stromlinie der Flüssigkeit verlaufen. Unser Ziel ist es Geschwindigkeit, Gradienten, Beschleunigung und die hydrodynamischen Gleichungen in diesen Koordinaten auszudrücken.

4.1.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung in Zylinderkoordinaten

Zuerst aber eine kleiner Rückgriff auf die Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) , die wir als das natürliche Koordinatensystem bei der Behandlung von axialsymmetrischen Scheiben erkannt haben. Auch hier sollen sie uns als Grundlage dienen.

Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Scheibenmittelpunkt, wobei r der Abstand vom Scheibenmittelpunkt, ϕ der Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektor auf die x/y-Ebene und der x-Achse und z die Höhe über der x/y-Ebene ist. Der Ortsvektor ist in kartesischen Koordinaten also einfach

$$\vec{r} = (r\cos\phi, r\sin\phi, z) \tag{4.1}$$

Die zeitliche Ableitung liefert die Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ für das mitbewegte Koordinatensystem ($\phi = 0$)

$$\vec{v} = (v_r, \omega r, v_z) \tag{4.2}$$

mit dem Betrag $v = |\vec{v}|$

$$v = \sqrt{\omega^2 r^2 + {v_r}^2 + {v_z}^2} \tag{4.3}$$

und den Bezeichnungen $v_r = \dot{r}, \omega = \dot{\phi}, v_\phi = \omega r, v_z = \dot{z}$. Die zweite Ableitung ergibt die Beschleunigung $\vec{g} = \dot{\vec{v}}$

$$\vec{g} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2, r\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{r}, \ddot{z}) \tag{4.4}$$

mit den Definitionen

$$g_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \qquad g_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{r} \qquad g_z = \ddot{z} \tag{4.5}$$

und dem Betrag $g = |\vec{g}|$

$$g = \sqrt{{g_\phi}^2 + {g_r}^2 + {g_z}^2} \tag{4.6}$$

Letzteres ist aber nicht identisch, mit der zeitlichen Ableitung des Geschwindigkeitsbetrages $\dot{v}$,

$$\dot{v} = \frac{r^2\ddot{\phi}\dot{\phi} + r\dot{\phi}^2\dot{r} + \ddot{r}\dot{r} + \ddot{z}\dot{z}}{\sqrt{r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2 + \dot{z}^2}} \tag{4.7}$$

welche die Komponente der Beschleunigung entlang des Geschwindigkeitsvektors angibt $\dot{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{g}}{v\cdot g} g = \cos\angle(\vec{g}, \vec{v})\,|\vec{g}|$.

Da sich bei einem mitbewegten Koordinatensystem die Einheitsvektoren ebenfalls bewegen, mußten wir diese bei der Differentiation mit berücksichtigen, mit der Folge, daß die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten durch (v_r, v_ϕ, v_z) und (g_r, g_ϕ, g_z) gegeben sind und nicht etwa durch $(\dot{r}, \dot{\phi}, \dot{z})$ und $(\ddot{r}, \ddot{\phi}, \ddot{z})$. Während $\dot{\phi}$ und $\ddot{\phi}$ die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung sind, ist mit v_ϕ und g_ϕ die Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungskomponente tangential zur Bewegung gemeint.

4.1.2 Definition des Koordinatensystems

Die neu zu definierenden Stromlinienkoordinaten (n, ϕ, s), die wir mit $\boldsymbol{S}$ bezeichnen wollen, sollen jetzt von einem mitfließendem orthonormalen Dreibein $(\vec{e}_n, \vec{e}_\phi, \vec{e}_s)$ aufgespannt werden.

Da wir ein achsensymmetrisches Problem haben, können wir unsere Betrachtung auf zwei Dimensionen reduzieren und den Vektor $\vec{e}_\phi$ mit dem Einheitsvektor der ϕ-Komponente in Zylinderkoordinaten identifizieren. Die anderen beiden Koordinaten sollen so orientiert sein, daß immer $\dot{s} = v_s = \sqrt{v_r^2 + v_z^2}$ und $\vec{e}_s = (v_r, 0, v_z)/v_s$ gilt. Wir haben es also mit einem krummlinigen Koordinatensystem zu tun, dessen eine Koordinatenachse entlang einer zwei-dimensionalen Stromlinie verläuft.

Die Koordinatenfunktionen Wie ist nun der Zusammenhang zwischen den Stromlinienkoordinaten $\boldsymbol{S}$ und den Zylinderkoordinaten? Dazu ersetzten wir $\boldsymbol{S}$ am Punkt (n_0, s_0) lokal durch ein kartesisches Koordinatensystem $\boldsymbol{S}$' mit den Koordinaten $\tilde{s}$ und $\tilde{n}$, so daß $\vec{e}_{\tilde{n}}$ und $\vec{e}_{\tilde{s}}$ im Punkt (n_0, s_0) tangential zu $\vec{e}_n$ und $\vec{e}_s$ sind. Die erste Ableitung stimmt also in beiden Systemen überein.

$\boldsymbol{S}$' können wir aber jetzt leicht durch Zylinderkoordinaten angeben. Man erhält ein, gegenüber $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_z$ um die Achse $\vec{e}_\phi$ mit dem Winkel i gedrehtes System. Der Winkel i soll so orientiert sein, daß, wenn die Stromlinie im z/r-System senkrecht (parallel zur z-Achse) aufsteigt und im weiteren Verlauf in die Vertikale (parallel zur r-Achse) übergeht, i von 0° nach 90° geht. D.h. bei $i = 0°$ fallen die Stromlinienkoordinaten lokal mit den Zylinderkoordinaten zusammen. Im System $\boldsymbol{S}$' ist i entlang $\tilde{s}$ und $\tilde{n}$ konstant, variiert aber im Allgemeinen in $\boldsymbol{S}$. Lediglich am Punkt s_0 hat i in beiden Systemen den gleichen Wert. Mathematisch bedeutet unser Vorgehen einfach, die Koordinatenfunktionen $r(n,s)$ und $z(n,s)$ in eine Taylorreihe zu entwickeln und schon nach der ersten Ordnung abzubrechen, also z.B.

$$r(s) \approx (s - s_0)\left[\frac{\partial r}{\partial s}\right]_{s_0} + r(s_0) \tag{4.8}$$

Da im weiteren Verlauf für die Koordinatenfunktionen nur die erste Ableitung gebraucht wird, kann man sich getrost in das lokale orthonormale System $\boldsymbol{\mathcal{S}}$' setzten. Leitet man nämlich die vollständige und die abgebrochene Taylorreihe einmal partiell ab, so sind diese trivialerweise am Entwicklungspunkt (im Beispiel $s = s_0$) identisch, da ja alle höheren Ordnungen wegfallen.

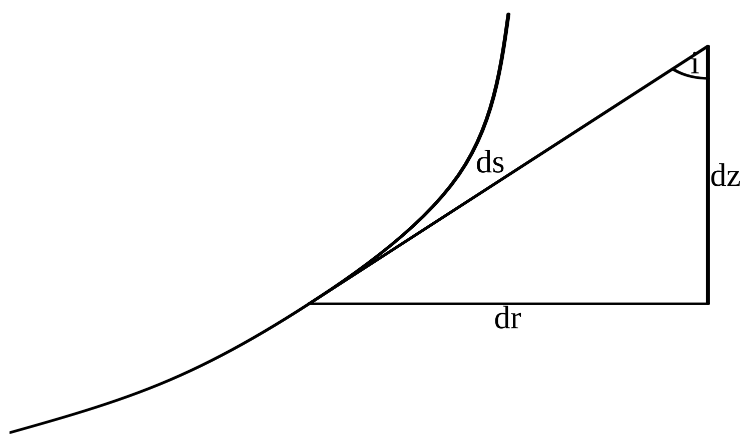

Abbildung 4.1: Geometrie der Stromlinienkoordinaten. Dargestellt ist die Stromlinie und dazu das stark vergrößerte Dreieck der Differentiale.

Aus Abb.4.1 sieht man nun sofort den Zusammenhang zwischen r, z einerseits und $\tilde{n}, \tilde{s}$ andererseits.

$$z(\tilde{n},\tilde{s}) = z_0 - \sin i\ \tilde{n} + \cos i\ \tilde{s} \qquad r(\tilde{n},\tilde{s}) = r_0 + \cos i\ \tilde{n} + \sin i\ \tilde{s} \tag{4.9}$$

bzw. umgekehrt

$$\tilde{s}(r,z) = (z - z_0)\cos i + (r - r_0)\sin i \qquad \tilde{n}(r,z) = (r - r_0)\cos i - (z - z_0)\sin i \tag{4.10}$$

Daraus und aus der Tatsache, daß i in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$' konstant ist, folgt aus den partiellen Ableitungen, die Beziehungen zwischen den partiellen Differentialen $(\partial r, \partial z)$ und $(\partial n, \partial s)$ sofort.

$$\frac{\partial z}{\partial \tilde{s}} = \cos i \qquad \frac{\partial z}{\partial \tilde{n}} = -\sin i \qquad \frac{\partial r}{\partial \tilde{s}} = \sin i \qquad \frac{\partial r}{\partial \tilde{n}} = \cos i \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial z} = \cos i \qquad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial r} = \sin i \qquad \frac{\partial \tilde{n}}{\partial z} = -\sin i \qquad \frac{\partial \tilde{n}}{\partial r} = \cos i \tag{4.12}$$

Die Geschwindigkeit Der funktionale Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeitskomponenten in Zylinderkoordinaten und dem Geschwindigkeitsbetrag entlang der zweidimensionalen Stromlinie ist

$$v_r = v_s \sin i \tag{4.13}$$

$$v_z = v_s \cos i \tag{4.14}$$

Mit diesen Relationen und Transformationsgleichungen (4.12) können wir jetzt leicht überprüfen, daß unsere Definition der Koordinaten konsistent ist. (Die explizite Zeitabhängigkeit lassen wir im weiteren außen vor.)

$$\frac{ds(r,z)}{dt} = v_r \frac{\partial s}{\partial r} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} = v_z \cos i + v_r \sin i = v_s \tag{4.15}$$

Der Geschwindigkeitsgradient Der Geschwindigkeitsgradient läßt sich allerdings jetzt nicht mehr so leicht berechnen, wie bei den Koordinatenfunktionen. Dies liegt daran, daß $v_r = \partial r/\partial s \cdot ds/dt + \partial r/\partial n \cdot dn/dt$ und $v_z = \partial z/\partial s \cdot ds/dt + \partial z/\partial n \cdot dn/dt$ selber schon eine erste Ableitung enthalten. Bei der Taylorentwicklung von v_r und v_z müssen dann also schon Terme zweiter Ordnung berücksichtigt werden, mit der Konsequenz, daß i nicht mehr als konstant betrachtet werden kann und die Krümmung der Kurve, also die Änderung von i entlang s und n, mit eingeht. Dies ist auch anschaulich klar, denn selbst wenn die Strömung gleichförmig entlang der Stromlinie fließt, wird sich die Radialkomponente der Geschwindigkeit allein schon dadurch ändern, daß die Strömung stetig ihre Richtung ändert. Aus $\partial v_s/\partial s = 0$ folgt also $\partial v_r/\partial s = 0$ nur, wenn die Stromlinie gerade, d.h. $i = \text{const}$ wäre. Die partiellen Ableitungen ergeben sich aus (4.13, 4.14) und der Produktregel

$$\frac{\partial v_r}{\partial s} = v_s \cos i \frac{\partial i}{\partial s} + \sin i \frac{\partial v_s}{\partial s} \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial s} = \cos i \frac{\partial v_s}{\partial s} - v_s \sin i \frac{\partial i}{\partial s} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial n} = v_s \cos i \frac{\partial i}{\partial n} + \sin i \frac{\partial v_s}{\partial n} \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial n} = \cos i \frac{\partial v_s}{\partial n} - v_s \sin i \frac{\partial i}{\partial n} \tag{4.19}$$

Zusätzlich benutzen wir die üblichen Transformationsgleichungen für Differentialausdrücke einer beliebigen Funktion $f(r,z) \rightarrow f(n,s)$.

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n} \tag{4.21}$$

Nun werden die Gleichungen für die Koordinatenfunktionen (4.11) in die Transformationsgleichungen (4.20, 4.21) eingesetzt.

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \cos i \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial r} \sin i \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \cos i \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial z} \sin i \tag{4.23}$$

Diese beiden Gleichungen können aufgelöst werden und man erhält die Transformationsregeln für die Gradienten.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos i \frac{\partial f}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial s} \sin i \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos i \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial n} \sin i \tag{4.25}$$

Nun kan man f durch die Geschwindigkeit (4.13, 4.14) ersetzen und ausdifferenzieren, wobei wir berücksichtigen, daß jetzt auch wieder i eine Funktion von s und n ist (4.16-4.26).

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = v_s \cos i^2 \frac{\partial i}{\partial n} + v_s \cos i \frac{\partial i}{\partial s} \sin i + \cos i \frac{\partial v_s}{\partial n} \sin i + \frac{\partial v_s}{\partial s} \sin i^2 \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = v_s \cos i^2 \frac{\partial i}{\partial s} - v_s \cos i \frac{\partial i}{\partial n} \sin i + \cos i \frac{\partial v_s}{\partial s} \sin i - \frac{\partial v_s}{\partial n} \sin i^2 \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \cos i^2 \frac{\partial v_s}{\partial n} - v_s \cos i \frac{\partial i}{\partial n} \sin i + \cos i \frac{\partial v_s}{\partial s} \sin i - v_s \frac{\partial i}{\partial s} \sin i^2 \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \cos i^2 \frac{\partial v_s}{\partial s} - v_s \cos i \frac{\partial i}{\partial s} \sin i - \cos i \frac{\partial v_s}{\partial n} \sin i + v_s \frac{\partial i}{\partial n} \sin i^2 \tag{4.29}$$

Die Beschleunigung Der Verlauf einer Stromlinie wird von den auf sie wirkenden Kräften bestimmt. Diese bewirken zum einen eine Änderung der Geschwindigkeit entlang der Stromlinie und zum anderen die Krümmung derselben. D.h. wir spalten den Kraft-, bzw. Beschleunigungsvektor ebenfalls wieder in eine Komponente senkrecht und eine Komponente parallel zur Stromlinie auf.

Berechnen wir also die Änderung der Geschwindigkeit entlang der Stromlinie $\dot{v}_s$, wobei wir uns erinnern, daß $v_s = \sqrt{v_r^2 + v_z^2}$ ist.

$$g_s = \frac{dv_s}{dt} = \frac{v_r \ddot{r} + v_z \ddot{z}}{v_s} \tag{4.30}$$

Die Krümmung der Stromlinie drückt sich aus durch eine Änderung des Winkels i der Stromlinie gegenüber der z-Achse

$$i = \arccos \frac{v_z}{\sqrt{{v_r}^2 + {v_z}^2}} \tag{4.31}$$

und dessen zeitliche Ableitung ist

$$\frac{di}{dt} = \frac{v_z \ddot{r} - v_r \ddot{z}}{{v_r}^2 + {v_z}^2} \tag{4.32}$$

auf eine äquivalente Form wie in 4.30 gebracht bedeutet das

$$g_n = v_s \frac{di}{dt} = \frac{v_z \ddot{r} - v_r \ddot{z}}{v_s} \tag{4.33}$$

Jetzt sieht man auch sehr klar, daß der mit g_s bezeichnete Term genau die Projektion des Beschleunigungsvektors $(\ddot{r}, \ddot{z})$ auf die Stromlinie $(v_r, v_s)/v_s$ und g_n die Projektion der Beschleunigung auf einen Normalenvektor $(v_z, -v_r)/v_s$ senkrecht zur Stromlinie ist.

Die Beschleunigung des Stroms erfolgt also der Anschauung folgend nur durch den Anteil g_s der Beschleunigung, der parallel zur Stromlinie ist. Der Beitrag senkrecht dazu ist, wie oben behauptet, für die Krümmung der Stromlinie verantwortlich.

Andersherum formuliert lauten die Gl. 4.30 und 4.33 ganz analog

$$\ddot{r} = \frac{g_s v_r + g_n v_z}{v_s} \tag{4.34}$$

$$\ddot{z} = \frac{g_s v_z - g_n v_r}{v_s} \tag{4.35}$$

Was man hieraus sehr schön sieht, ist, daß wenn sich $\ddot{r}$ und $\ddot{z}$ addiditv aus mehreren Komponenten zusammensetzen,

$$\ddot{r} = g_l + g_{r\,1} + g_{r\,2} \tag{4.36}$$

$$\ddot{z} = g_{z\,1} + g_{z\,2} \tag{4.37}$$

dann setzen sich g_s und g_n ebenfalls additiv aus Termen zusammen, die der gleichen Form wie in Gl. 4.30 und 4.33 gehorchen, wobei aber jetzt $\ddot{r}$ und $\ddot{z}$ durch die jeweiligen Komponenten auf der rechten Seite von Gl.4.36 und Gl. 4.37 zu ersetzen sind.

$$g_s = \frac{(g_l + g_{r\,1} + g_{r\,2})\, v_r + (g_{z\,1} + g_{z\,2})\, v_z}{v_s} \tag{4.38}$$

Das ist nicht anders zu erwarten, da (g_s, g_n) durch eine lineare Abbildung (Drehung) aus (g_r, g_z) hervorgeht.

Zum Schluß stellen wir noch den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeitsgradienten und der Beschleunigung her. Wir werden später merken, daß hierin die eigentliche Begründung für unsere Wahl der Stromlinienkoordinaten liegt. Eigentlich würden nämlich Geschwindigkeitsgradient und Beschleunigung im Zweidimensionalen aufgrund der Kettenregel über eine Summe der Form (4.20, 4.21) verknüpft sein. Dadurch aber, daß die Geschwindigkeit immer entlang der Stromlinie verläuft, fällt die senkrechte Komponente weg und es ist $\dot{n} = v_n = 0$, d.h.

$$g_s = \frac{dv_s}{dt} = v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \tag{4.39}$$

und

$$g_n = v_s \frac{di}{dt} = {v_s}^2 \frac{\partial i}{\partial s} \tag{4.40}$$

4.2 Die Euler-Gleichungen in der Flußröhrennäherung

Im folgenden Abschnitt werden wir das Gerüst der Stromlinienkoordinaten benutzen, um die hydrodynamischen Gleichungen für einen strahlungsgetriebenen Wind so zu tansformieren, daß sie sich durch geringfügige Näherungen deutlich vereinfachen und von partiellen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen übergehen. Dies erreichen wir durch Aufsplittung des Windes in vielen einzelne, isolierte hydrodynamische Flußröhren.

Dazu betrachten wir zunächst nur einen Ring der Breite Δr und der Fläche $A_{\circledcirc}$ auf der Scheibenoberfläche, von dem ein stationärer Wind starten soll,

$$A_{\circledcirc} = 2\pi r \Delta(r) \tag{4.41}$$

der sich entlang einer Stromlinie $s(r,z)$ bewegt. Nach unserer Definition zu Beginn des Kapitels bilden alle Stromlinien, die ihren Ausganspunkt auf dem Flächenelement $A_{\circledcirc}$ haben eine Flußröhre. Wir nehmen wie immer Axialsymmetrie an, so daß wir den oben hergeleiteten Formalismus der zweidimensionalen Stromlinienkoordinaten $\boldsymbol{S}$ mit den Variablen n, s, i, v_s, g_n und g_s verwenden können.

Dann kann man die Betrachtung quasi eindimensional halten, indem man die *hydrodynamische Flußröhren Approximation* (HFA) verwendet, wobei man einfach die Entwicklung entlang des Pfades s betrachtet und die zur Stromlinie senkrechten Geschwindigkeitsgradienten geeignet approximiert. Diese Methode ähnelt der von [Fukue 1989, Fukue und Okada 1990], die aber thermische Winde betrachten und keinen Strahlungsdruck berücksichtigen.

4.2.1 Eulergleichung

Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ einer inkompressiblen, kontinuierlichen Flüssigkeit mit dem lokalen Druck $P(\vec{r})$, welche einer externen Beschleunigung $\vec{g}(\vec{r})$ ausgesetzt ist, wird von der Eulergleichung beschrieben [Lang 1974, p.281],

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = \vec{g}^{ext} - \frac{\vec{\nabla}(P)}{\rho} \tag{4.42}$$

wobei in Zylinderkoordinaten $\nabla = (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z})$ und $\vec{v} = (\dot{r}, r\dot{\phi}, \dot{z}) = (v_r, v_\phi, v_z)$ ist. Allerdings wird in unserem Fall immer Kreissymmetrie und Zeitunabhängigkeit vorausgesetzt, so daß $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ist. So erhält man die folgenden Gleichungen für die verbleibenden poloidalen Komponenten

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = g_r^{ext} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \tag{4.43}$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z^{ext} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{4.44}$$

Transformation in Stromlinienkoordinaten Um nun auch die Differentialgleichungen auf Stromlininenkoordinaten zu transformieren, verwenden wir die Transformationsregeln für die Differentialausdrücke (4.24, 4.25). Auf die Eulergleichung angewandt erhalten wir

$$v_s{}^2 \cos i \frac{\partial i}{\partial s} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} \sin i = \cos i \left(g_n^{ext} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} \right) + \left(g_s^{ext} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} \right) \sin i \tag{4.45}$$

$$v_s \cos i \frac{\partial v_s}{\partial s} - v_s{}^2 \frac{\partial i}{\partial s} \sin i = \cos i \left(g_s^{ext} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} \right) - \left(+g_n^{ext} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} \right) \sin i \tag{4.46}$$

Im Gegensatz zur Geschwindigkeit welche nur eine Komponente entlang der Stromlinie hat und durch die Gleichungen (4.13, 4.14) beschrieben wird, setzen sich die Kräfte aus jeweils zwei Komponenten zusammen (4.9) nämlich

$$g_z^{ext} = g_s^{ext} \cos i - g_n^{ext} \sin i \qquad g_r^{ext} = g_n^{ext} \cos i + g_s^{ext} \sin i \tag{4.47}$$

$$g_s^{ext} = g_z^{ext} \cos i + g_r^{ext} \sin i \qquad g_n^{ext} = g_r^{ext} \cos i - g_z^{ext} \sin i \tag{4.48}$$

Man sieht sofort wieder die Darstellung der radialen und vertikalen Beschleunigung durch die entspechenden Komponenten in Stromlinienkoordinaten (4.39, 4.40, 4.9). Nach letzteren löst man jetzt die beiden Gleichungen auf und erhält so zwei neue separate Komponenten der Eulergleichung.

$$v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} = g_s^{ext} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} \tag{4.49}$$

$$v_s{}^2 \frac{\partial i}{\partial s} = g_n^{ext} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} \tag{4.50}$$

Druck und Schallgeschwindigkeit Auch bei den Gasgleichungen resultiert die Beschleunigung wie bei der Beschreibung der Bewegung fester Körper, aus der Summe der auf das Flußelement wirkenden Kräfte geteilt durch die Masse. Neben den externen Kräften g_{ext} (z.B. Gravitation) tritt aber noch eine zusätliche Beschleunigung durch den Druckgradienten im Gas auf, wobei der Druck durch die lokale Schallgeschwindigkeit c_s, die Dichte ρ und den Adiabatenindex γ gegeben ist,

$$P = \frac{\rho c_s{}^2}{\gamma} \tag{4.51}$$

und die Schallgeschwindigkeit in einem Gasdruck dominierten Medium proportional zur Wurzel der Temperatur ist.

$$c_s{}^2 = \frac{2Tk_B}{m_p \mu} \tag{4.52}$$

Die Annahme, das Medium sei gasdruckdominiert, ist dann gerechtfertigt, wenn der noch relativ dichte Bereich des Windes nur einen Bruchteil der Dicke der Scheibe hat, so daß trotz hoher Dichte und Temperatur das Gas als optisch dünn betrachtet werden kann. Diese Annahme kann im Nachhinein leicht überprüft werden.

Bei strahlungsgetriebenen Winden kommt aber zusätzlich zu Druck und Gravitationskraft noch, unter Vernachlässigung möglicher magnetischer oder elektrischer Felder, eine nach außen gerichtete Strahlungsbeschleunigung hinzu, so daß

$$g_s^{ext} = g_s{}^{rad} - g_s{}^{grav} \tag{4.53}$$

$$g_n^{ext} = g_n{}^{rad} - g_n{}^{grav} \tag{4.54}$$

wobei jeweils die entsprechenden Koponenten entlang bzw. senkrecht zur Stromlinie $\vec{s}$ gemeint sind. Bedenkt man nun, daß die Schallgeschwindigkeit natürlich keine Konstante, sondern eine

Funktion des Ortes ist und setzt (4.51, 4.53, 4.54) in (4.49, 4.50) ein, dann erhält man die erste und zweite Komponente der Eulergleichung.

$$v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} = -g_s{}^{grav} + g_s{}^{rad} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial c_s{}^2}{\partial s} - \frac{c_s{}^2}{\gamma\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s} \tag{4.55}$$

$$v_s{}^2 \frac{\partial i}{\partial s} = -g_n{}^{grav} + g_n{}^{rad} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial c_s{}^2}{\partial n} - \frac{c_s{}^2}{\gamma\rho}\frac{\partial \rho}{\partial n} \tag{4.56}$$

4.2.2 Massenerhaltung

In den oben aufgestellten Gleichungen war bisher noch nicht die besondere Geometrie der Flußröhre eingegangen. Deshalb benutzen wir jetzt das Prinzip der Massenerhaltung, um (4.55, 4.56) weiter zu entwickeln.

Die zeitliche Änderung der Masse in einem Volumenelement (Massenverlustrate)

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} \tag{4.57}$$

ist alleine durch den Massenausfluß entlang der Stromlinie gegeben, da eine Vernichtung oder Erzeugung von Masse ausgeschlosen wird ($\partial M/\partial t = 0$), und die Flußröhre als abgeschlossen angenommen wird ($v_n = 0$).

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = v_s \frac{\partial M}{\partial s} \tag{4.58}$$

Nun drückt man die Masse durch die Dichte in einem infinitesimal kleinen Volumenelement einer Flußröhre aus. Die Grundfläche dieses Volumens A_Υ — die Querschnittsfläche der Flußröhre — ist im aller einfachsten Fall der Mantel eines Kegelstumpfes und wird durch zwei Ringe mit Radius $r \pm \frac{1}{2}\Delta r$ im Abstand $\sqrt{\Delta r^2 + \Delta z^2}$ begrenzt. Die Fläche des Mantels ist durch

$$\Delta A^\Upsilon = 2\pi r \sqrt{\Delta r^2 + \Delta z^2} \tag{4.59}$$

gegeben. Der Wurzelausdruck in den obigen Gleichungen ist einfach die Länge des Linienelementes $\Delta\vec{n}$ senkrecht zur Stromlinie $\Delta\vec{s}$.

$$\sqrt{\Delta r^2 + \Delta z^2} = \Delta n \tag{4.60}$$

Durch Herausziehen von Δr aus der Wurzel sieht man, auf Kosten einer Singularität, die erst bei der Betrachtung mehrerer benachbarter Röhren einen Sinn macht, daß sich Δn einfach durch Projektion auf Δr ergibt [Fukue und Okada 1990].

$$\Delta n = \frac{\Delta r}{\cos i} \tag{4.61}$$

Diese Methode hat den großen Nachteil, daß die Breite der Flußröhre nichts zu tun hat mit den hydrodynamischen Gegebenheiten, sondern alleine durch einen Zusammenhang über die Zylinderkoordinaten bestimmt wird, den wir eigentlich loswerden wollten. Wir werden daher beim konkreten Modell einen anderen Ansatz wählen und die Breite der Flußröhre geeignet approximieren, z.B. durch Berücksichtigung des Einwirkens benachbarter Flußröhren.

Die Masse in dem Volumenelement $\Delta V = \Delta A^{tube}\,\Delta s$ entlang der Flußröhre schreiben wir deshalb einfach als

$$\Delta M = \rho\,\Delta A^\Upsilon\,\Delta s \tag{4.62}$$

und die Massenverlustrate (Masse pro Zeit) nach 4.58

$$\Delta\dot{M} = 2\pi r \rho v_s\,\Delta n \tag{4.63}$$

Da nur eine differentielle Flußröhre betrachtet wird, ergibt sich hier auch nur eine Gleichung für die differentielle Massenverlustrate $\Delta \dot{M}$ der Röhre. Diese muß in einem stationären Modell entlang einer Stromlinie immer konstant sein, weil wir im Flußröhrenbild davon ausgehen, daß genau das, was unten reinkommt auch oben wieder rauskommt. *Die Grundannahme der HFA ist, daß es keinen Missefluß zwischen den Röhren gibt.* Also ist $d/ds \Delta \dot{M} = 0$. Teilen wir nun die differentielle Massenverlustrate (4.63) noch einmal durch die ebenfalls differentielle Grundfläche $A_{\circledcirc}$ der Flußröhre auf der Scheibe[1], so erhalten wir ein Maß für den effektiven Massenausfluß M_{f_0} am Fußpunkt der Flußröhre. Er gibt an, wieviel Masse die Scheibe pro Zeit und Fläche $A_{\circledcirc}$ beim Radius r_0 verliert. Die gesamte Massenverlustrate der Scheibe erhalten wir durch Integration über alle Radien $\dot{M_{Wind}} = 2\pi \int M_{f_0} r\, dr$, denn natürlich ändert sich M_{f_0} von einer Stromlinie zur anderen.

$$M_{f_0} = \left[\frac{1}{2\pi r\, \Delta r} \right]_{r=r_0} \Delta \dot{M} \tag{4.64}$$

An dieser Stelle ist $\Delta n = \Delta n_0$ und $R = R_0$. Die Kontinuitätsgleichung 4.63 wird dann zu

$$M_{f_0} = a \rho v_s \tag{4.65}$$

mit dem Geometriefaktor

$$a = \frac{A^{\Upsilon}}{A_{\circledcirc}} = \frac{r}{r_0} \frac{\Delta n}{\Delta n_0} \tag{4.66}$$

der die Änderung der Querschnittsfläche der Röhre entlang der Stromlinie beschreibt. Da im Vergleich zu (4.63) nur durch einen für die Flußröhre konstanten Faktor dividiert wurde, gilt auch hier, daß die Ableitung nach der Stromlinienkoordinate $\partial M_{f_0}/\partial s$ beider Terme in (4.65) entlang einer Stromlinie gleich Null ist und wir erhalten eine Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Dichte, die von der Geometrie der Flußröhre abhängt.

$$0 = a\rho \frac{\partial v_s}{\partial s} + a v_s \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho v_s \frac{\partial a}{\partial s} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{1}{v_s} \frac{\partial v_s}{\partial s} \tag{4.67}$$

Setzen wir nun diese Gleichung der Massenerhaltung in die erste Komponente der Eulergleichung (4.55) ein, so erhalten wir

$$v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} = -{g_s}^{grav} + {g_s}^{rad} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial {c_s}^2}{\partial s} + \frac{{c_s}^2}{a\gamma} \frac{\partial a}{\partial s} + \frac{{c_s}^2}{\gamma v_s} \frac{\partial v_s}{\partial s} \tag{4.68}$$

Im Weiteren wird jetzt nur noch ein isothermer Wind betrachtet,

$$\frac{\partial {c_s}^2}{\partial s} = 0 \tag{4.69}$$

was allerdings nur im Nahbereich des Startortes über der Scheibe gerechtfertigt erscheint. Dort wird das Energiegleichgewicht eines Gases durch das starke Strahlungsfeld der Scheibe bestimmt, welches auch nur in grober erster Näherung zu einem isothermen Verlauf führt ([Vitello und Shlosman 1988] und Abb.3.24). Dies wird falsch, wenn man den weiteren Verlauf des Windes parallel zur Scheibe verfolgt, hier führt die radiale Abnahme der Dissipationsrate auch zu einer Abnahme der Gastemperatur im Wind[2]. Die Existenz hochenergetischer Komponenten im Spektrum kann zusätzlich noch zu einer weiteren, unter Umständen drastischen, Verletzung dieser Annahme führen ([Schaaf und Schmutzler 1991] und Abb.3.23).

Außerdem verstecken wir den Faktor γ in der Schallgeschwindigkeit und nehmen ihn aus der Gleichung, weil er für die theoretische Behandlung des Windes zunächst keine Rolle spielt.

[1]Diese Grundfläche ist für $i \neq 0°$ nicht identisch mit der Querschnittsfläche der Röhre.

[2]Die Temperatur des Windes muß nicht unbedingt der Gastemperatur der Scheibe entsprechen, da dort ein optisch dickes Medium vorliegt, dessen Temperatur duch den vertikalen Energietransport bestimmt ist. Der Temperaturgradient, welcher beim Übergang von der Scheibentemperatur auf die Windtemperatur entsteht ist ebenfalls nicht berücksichtigt.

Die entscheidende Näherung der HFA betrifft nun aber die Behandlung des vertikalen Druckgradienten in (4.50). Gelingt es diesen Term geeignet zu approximieren, dann kann man die Beschreibung des Windes auf eine quasi eindimensionale Betrachtung reduzieren.

Schauen wir uns zuerst an, was passiert, wenn der vertikale Druckgradient Null bzw. vernachlässigbar klein ist, also z.B. dann, wenn der Wind immer senkrecht nach oben steigt und die radialen Gradienten, wie in der Akkretionsscheibentheorie üblich, klein sind im Vergleich zu den vertikalen. Unsere Windgleichungen lauten dann im Rahmen der HFA

$$\frac{({v_s}^2 - {c_s}^2)}{v_s}\frac{dv_s}{ds} = g_s^{rad} - g_s^{grav} + \frac{{c_s}^2}{a}\frac{da}{ds} \tag{4.70}$$

$${v_s}^2\frac{di}{ds} = {g_n}^{rad} - {g_n}^{grav} \tag{4.71}$$

Wir haben nun schon die partiellen Ableitungen durch totale Ableitungen ersetzt, da alle Variablen in dieser Formulierung nur von s abhängen, so daß sich aus dem System partieller Differentialgleichungen ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ergibt. Wir werden im weiteren die erste Gleichung (4.70) als s-Komponente (s-Gleichung) und die zweite Gleichung (4.71), mit und ohne Druckgradient, als n-Komponente (n-Gleichung) der Eulergleichung bezeichnen, sowie unter $'$ die totale Ableitung d/ds verstehen.

4.2.3 Approximation des Geometriefaktors a

Was nun noch fehlt, sind die schon oben angekündigten Annahmen für das Verhalten des Geomtriefaktors a. Die Geometrie der Flußröhre, insbesondere deren Breite, wird im Allgemeinen stark vom Zustand der benachbarten Röhren abhängen, welcher bei der hier verwandten einfachen Betrachtung aber kaum zugänglich sein wird, es sein denn, man löst die Gleichungen für die gesamte Scheibe simultan. Würden wir das Problem so weit reduzieren, wie es [Vitello und Shlosman 1988, Meier 1979a] getan haben, und nur einen vertikalen Wind betrachten ($i = 0°$), dann verbänden wir die beiden asymptotischen Fälle nahe der Scheibe ($a = 1$, zylindrische Geometrie) und im unendlichen ($a = z^2/r_0^2$, sphärische Geometrie) zu einem Faktor $a = 1 + z^2/r_0^2$, der sicher eine gute erste Näherung ist. Will man aber nun den zweidimensionalen Charakter des Windes berücksichtigen, so würde man dem Problem mit einer solchen Näherung nicht immer gerecht. Für den Fall, daß die Ausdehnungsrichtung des Windes, also die Stromlinie, im Großen und Ganzen weiterhin parallel zur z-Achse verliefe und i nur um wenige Grad schwankte, bräuchte man sich sicherlich keine großen Sorgen zu machen. Allerdings zeigt sich in den Rechnungen, daß die Stromlinie nicht nur nicht parallel zur z-Achse, sondern unter Umständen sogar senkrecht dazu verläuft und sogar wieder auf die Scheibe zurückzustürzen scheint. Spätestens an dieser Stelle wird deutlich, daß nun der Einfluß der benachbarten Röhre erheblich sein wird, nämlich in der Hinsicht, daß sie es im stationären Fall sicher nicht zulassen wird von ihrem Nachbarn dermaßen bedrängt und geschnitten zu werden. Nun wie ist dies, zumindest näherungsweise, in der Beschreibung des Geometriefaktors zu berücksichtigen? Am einfachsten stellen wir uns zunächst eine Vielzahl benachbarter Röhren vor, die alle den gleichen physikalischen Bedingungen unterliegen, im Scheiben-Modell hieße das man vernachlässigt lokal den radialen Gradienten der Scheibe, bzw. man stelle sich die Scheibe als unendlich ausgedehnt und isotherm vor. In diesem Fall werden alle Stromlinien immer parallel verlaufen und an jeder Stelle den gleichen Winkel i mit der z-Achse bilden. Die Breite Δn einer Flußröhre wird dann alleine durch diesen Winkel bestimmt sein. Je stärker die Flußröhren gebogen sind, desto weniger Platz steht für jede einzelne zur Verfügung.

$$\Delta n = \cos i \, \Delta r_0 = \frac{\cos i}{\cos i_0}\Delta n_0 \tag{4.72}$$

wobei hier Δn_0 und i_0 wieder die Breite respektive der Inklinationswinkel der Flußröhre am Fußpunkt der Stromlinie ist. Im Bereich nahe der Scheibe, ist dies sicher eine akzeptable Näherung die bei einer nach außen gerichteten Expansion ins Unendliche aber wieder in einen quasi sphärischen Fall (s.o.) übergehen soll. Erweitern wir deshalb unsere Approximation von a noch um einen sphärischen Faktor, ohne die Winkelinformation zu verlieren und schreiben

$$a = \cos i \frac{r}{r_0} \left(1 + \frac{r_0 \tilde{D}^2}{r \tilde{D}_0^2} \right) \tag{4.73}$$

$$\tilde{D} = \sqrt{(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{4.74}$$

$$\tilde{D}_0 = \sqrt{{r_0}^2 + {z_0}^2}. \tag{4.75}$$

Hierbei ist $\tilde{D}$ der Abstand vom Ursprung (r_0, z_0) der Flußröhre und $\tilde{D}_0$ der Abstand des Ursprungs vom Zentrum der Scheibe. Der Geometriefaktor hängt also von drei Variablen ab (r,z,i) mit den entsprechenden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial a}{\partial r} = \frac{\cos i}{r_0} + \frac{2\,(r - r_0)\,\cos i}{{\tilde{D}_0}^2} \quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{2\,(z - z_0)\,\cos i}{{\tilde{D}_0}^2} \quad \frac{\partial a}{\partial i} = -\sin i \,\frac{r}{r_0} \left(1 + \frac{r_0 \tilde{D}^2}{r\, {\tilde{D}_0}^2} \right). \tag{4.76}$$

Die spezifische Ableitung von a nach s, welche wir in der Eulergleichung benötigen ist dann unter Verwendung von (4.11, 4.76) nach der Kettenregel und einigen Umformungen

$$\frac{1}{a}\frac{da}{ds} = \frac{2\, r_0\, (z - z_0)\, \cos i + \left(2\, r\, r_0 - 2\, {r_0}^2 + {\tilde{D}_0}^2 \right) \sin i}{r_0\, \tilde{D}^2 + r\, {\tilde{D}_0}^2} - \tan i \frac{di}{ds}. \tag{4.77}$$

4.3 Thomsonwind

Wie schon bei der Betrachtung des Strahlungsdruckes wollen wir uns auch jetzt wieder zunächst dem einfachsten Fall eines strahlungsgetriebenen Windes zuwenden und beim Strahlungsdruck alleine Thomsonstreuung berücksichtigen, was wieder den großen Vorteil hat, daß dann g_{rad} nur noch ortsabhängig ist. Eine solche Situation ergäbe sich dann, wenn die Scheibe sehr nahe an der Eddington-Luminosität akkretieren würde (superkritische Akkretion). Dies ist von [Meier 1979a, Beltrametti und Perry 1980] schon einmal in einer eindimensionalen Form für ausgedehnte (sphärische) Strahlungsquellen gerechnet worden. Auch für Neutronensterne und für QSO's wurden solche Rechnungen gemacht [Kippenhahn 1977, Meier 1982c, Meier 1982b, Beltrametti und Perry 1980, Turolla *et al* 1986, Meier 1979a, Quinn und Paczyński 1985, Mushotzky *et al* 1972, Kippenhahn *et al* 1975, Mestel *et al* 1976, Kippenhahn 1977, Kato 1983a, Kato 1983b], wobei aber immer sphärische Situationen zu Grunde lagen.

4.3.1 Der kritische Punkt

Benutzen wir zunächst die Eulergleichungen ohne den vertikalen Druckgradienten (4.71, 4.70). Diese lassen sich unter der Annahme, daß die Opazität nur von Thomsonstreuung dominiert wird, sehr leicht nach den Gradienten auflösen.

$$v'_s = \frac{v_s}{{v_s}^2 - {c_s}^2} \left(g_s^{rad} - g_s^{grav} + \frac{{c_s}^2}{a} \frac{da}{ds} \right) = \frac{v_s}{v_s^2 - c_s^2} \tilde{g}_s \tag{4.78}$$

$$i' = \frac{g_n^{rad} - g_n^{grav}}{v_s^2} = \frac{\tilde{g}_n}{v_s^2} \tag{4.79}$$

Die s-Gleichung hat jetzt genau die Form der üblichen hydrodynamischen Gleichung für strahlungsgetriebene Winde [Kippenhahn *et al* 1975, Marlborough und Roy 1970] mit einem kritischen Punkt beim sonischen Punkt $v_s = c_s$ an dem der Nenner verschwindet. Ohne den Strahlungsterm g_{rad} erhalten wir die Gleichung für einen isothermen Sonnenwind [Parker 1958, Gl. 10], deren Lösung durch die Lage des kritischen Punktes eindeutig bestimmt werden kann [Mihalas und Mihalas 1984, S.297-304]. Der Grund liegt darin, daß durch den Vorzeichenwechsel beim kritischen Punkt die Differentialgleichung vom elliptischen Typ (subsonisch) in den hyperbolischen Typ (supersonisch) übergeht [Abbot 1980]. Elliptische DGLen beschreiben im allgemeinen Gleichgewichtszustände, während hyperbolische DGLen Ausbreitungs- und Schwingungszustände beschreiben; der Übergang zwischen diesen beiden Typen ist nur an sog. *Charakteristiken* möglich [Courant und Hilbert 1968, Kap. 5]. Eine Charakteristik liegt dort vor, wo das linearisierte Gleichungssystem eine verschwindende Determinante hat, bzw. im eindimensionalen Fall, wenn der Nenner der DGL verschwindet.

Fordern wir für unsere Lösung also einen stetigen Übergang vom subsonischen in den supersonischen Bereich, so muß unsere Lösung durch den kritischen Punkt $v_s = c_s$ gehen, und dv/ds muß dort einen endlichen Wert haben, d.h. Nenner und Zähler müssen *gleichzeitig* verschwinden. Dies liefert uns zwei zusätzliche Bedingungen für den kritischen Punkt unserer DGL.

$$v_s = c_s \tag{4.80}$$

$$0 = g_s^{rad} - g_s^{grav} + \frac{{c_s}^2}{a}\frac{da}{ds} = \tilde{g}_s(r, z, i, i') \tag{4.81}$$

Wie erhalten wir nun den Wert für v' am kritischen Punkt? Dazu entwickeln wir Zähler und Nenner um den kritischen Punkt $s = s_c$ bis zur ersten Ordnung. Der Wert beider Funktionen an diesem Punkt ist bekanntlich Null, so daß die Terme nullter Ordnung wegfallen und Zähler und Nenner nur noch aus ihren Gradienten am Punkt s_c bestehen, sowie einem linearen Term in s, der sich aber wegkürzt.

$$v_s' = \frac{\left[\frac{d}{ds}\tilde{g}_s v_s\right]_{s_c}(s - s_c)}{\left[\frac{d}{ds}({v_s}^2 - {c_s}^2)\right]_{s_c}(s - s_c)} \tag{4.82}$$

In einer Umgebung des kritischen Punktes ist daher

$${v_s'}^2 = \frac{1}{2}\frac{d\tilde{g}_s}{ds} \tag{4.83}$$

mit der Bedingung, daß, wenn eine reele Lösung existieren soll, der Gradient auf der rechten Seite positiv sein muß.

4.3.2 Allgemeine Lösung für Scheibenwinde am kritischen Punkt

Schreiben wir nun die Lösung der Scheibenwindgleichung am kritischen Punkt in einer allgemeinen Form auf. Wenn $\tilde{g}_s$ und $\tilde{g}_n$ gegeben sind, dann lautet die linearisierte s-Gleichung (4.84)

$${v'_s}^2 = \frac{1}{2}\tilde{g}_s' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial r}\sin i + \frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial z}\cos i + \frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial i}i' + \frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial i'}i''\right) \tag{4.84}$$

und die Ableitung der n-Gleichung, welche i'' liefert, lautet

$$i'' = \frac{\tilde{g}_n}{v_s^2}\left(\frac{\tilde{g}_n'}{\tilde{g}_n} - \frac{2v_s'}{v_s}\right) = \frac{1}{{v_s}^2}\left(\frac{\partial\tilde{g}_n}{\partial r}\sin i + \frac{\partial\tilde{g}_n}{\partial z}\cos i + \frac{\partial\tilde{g}_n}{\partial i}i' - \frac{2\tilde{g}_n}{v_s}v'_s\right). \tag{4.85}$$

Diese letzte Gleichung ist wieder von v' abhängig, so daß nach Einsetzen derselben in die linearisierte s-Gleichung (4.84) diese noch nach v_s' aufgelöst werden muß. Es ergeben sich dann zwei Lösungen und wieder die einschränkende Bedingung, daß der Radikant positiv ist.

$$v_s' = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{2f + 2\frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial i'}\frac{\tilde{g}_n'}{v_s^2} + \left(\frac{\tilde{g}_n}{v_s^3}\frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial i'}\right)^2} - \left(\frac{\tilde{g}_n}{v_s^3}\frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial i'}\right)\right) \tag{4.86}$$

$$f = \frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial r}\sin i + \frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial z}\cos i + \frac{\partial\tilde{g}_s}{\partial i}i' \tag{4.87}$$

Im Grenzfall, daß a nicht von i abhängig ist, fallen die partiellen Ableitungen nach i' weg und man erhält – wie erwartet – die einfache Beziehung $v_s' = \pm\sqrt{f/2}$ analog zu (4.83), was nahelegt, das negative Vorzeichen der Wurzel in (4.86) auszuschließen, da es den falschen Grenzwert ergibt.

a) Zweidimensionale Röhre

Betrachten wir zunächst die Situation in einer linearen (d.h. keine n-Gleichung), zylindersymmetrischen Röhre ohne Strahlungsdruck und Gravitation. Die stationäre Eulergleichung (4.70) lautet dann

$$\frac{dv_s}{ds} = \frac{v_s}{({v_s}^2 - {c_s}^2)} \frac{c_s^2\, da}{a\, ds}. \tag{4.88}$$

Eine Strömung mit einem positiven Geschwindigkeitsgradienten kann sich im subsonischen Bereich ($v_s^2 - c_s^2 < 1$) nur ergeben, wenn a' negativ ist, die Röhre sich also verengt. Im supersonischen Bereich ($v_s^2 - c_s^2 > 1$) muß sich dahingegen die Röhre verbreitern, also $a' > 0$ sein. Der Übergang vom subsonischen in den supersonischen Bereich erfolgt also genau an der Stelle, wo die Röhre ihren minimalen Querschnitt erreicht hat[3] ($a' = 0$), in völliger Übereinstimmung mit Gleichung (4.81).

b) Punktquelle

Als nächsten Schritt betrachten wir den kugelsymmetrischen Fall um eine leuchtende Punktmasse. Die Stromlinienkoordinate s wird durch den radialen Abstand r ersetzt, die Querschnittsfläche ist $a = 4\pi r^2 \Rightarrow a'/a = 2/r$ und Gravitation wie Strahlungskraft fallen mit r^{-2} ab; das Verhältnis von Strahlungskraft zur Gravitation sei mit Γ_{es} bezeichnet.

$$\tilde{g}_s = \frac{\Gamma_{es} - 1}{r^2} + \frac{2{c_s}^2}{r} \tag{4.89}$$

Der kritische Radius r_c folgt dann aus $g_s = 0$ (4.81)

$$r_c = \frac{1 - \Gamma_{es}}{2{c_s}^2} \tag{4.90}$$

und aus (4.83) ergibt sich die Beschleunigung am sonischen Punkt.

$${v_s'}^2 = \frac{4{c_s}^6}{(-1 + \Gamma_{es})^2} \quad \overset{1>\Gamma_{es}>0}{\Rightarrow} \quad v_s' = \frac{2{c_s}^3}{1 - \Gamma_{es}} \tag{4.91}$$

Für $g_{rad} \geq g_{grav}$ kann es keinen Übergang vom subsonischen in den supersonischen Bereich geben, da dann, wie wir hier sehen, der kritische Radius negativ würde. Dies impliziert eine obere Grenze für die Leuchtkraft, bis zu der ein solcher Wind noch möglich ist [Marlborough und Roy 1970].

c) Scheiben

Anders sieht die Sache bei Scheibenwinde aus. Im simplen Fall eines vertikalen Windes ($s \rightarrow z$) mit konstanter Breite der Flußröhre ($a' = 0$) steigt die Gravitationsanziehung nahe der Scheibe linear mit z an – der Gradient ist also positiv und konstant. Der Strahlungsdruck ist in erster Näherung entlang der z-Achse konstant, dessen Gradient ist Null bzw. sehr klein (Abb.3.13). Radial nehmen Strahlungsdruck und Gravitation mit r^3 ab. Wenn wir mit Γ_{es} jetzt das Verhältnis von Strahlungskraft zu Gravitation am Ort $z = 1$ bezeichnen, dann ist

$$\tilde{g}_s = \frac{\Gamma_{es} - z}{r^3} \tag{4.92}$$

und der kritische Punkt

$$z_c = \Gamma_{es} \tag{4.93}$$

[3] Eine solche Konfiguration entspricht genau der Situation an einer Düse (engl. nozzle) und wird in der Literatur als *DeLaval nozzle* bezeichnet.

was uns für den Geschwindigkeitsgradienten am kritischen Punkt die Beziehung

$$v_s'^2 = -\frac{1}{2r^3} \tag{4.94}$$

liefert. Wir sehen, daß es hier überhaupt keine reele Lösung geben kann, was auch verständlich ist, denn es fehlt in dieser Konfiguration nicht nur die Düse, sondern zusätzlich tritt auch noch die ansteigende Gravitationskraft als tatkräftiger Bremser auf. Einen "richtigen" kritischen Punkt kann es erst geben, wenn der Wind von der Zylindergeometrie in den sphärischen Bereich übergeht, also z.B. bei einer superkritischen Akkretionsscheibe.

Ändert sich die Situation nun aber, wenn wir die Zweidimensionalität der Schweibenwinde berücksichtigen?

Radial nimmt der Strahlungsdruck einer Scheibe in einem weiten Bereich mit r^3 ab (Abb.3.7 und Abb.3.8) und die Gravitationskraft ebenfalls, bei der man aber noch die Zentrifugalkraft hinzunehmen muß (3.72). Außerdem sind vertikale und radiale Strahlungsbeschleunigung von der gleichen Größenordnung, so daß wir mit einem Proportionalitätsfaktor $g_r^{rad} \approx \eta\Gamma_{es}(r_c/r)^3$ schreiben können. (4.48) erlaubt es uns dann die Beschleunigung, auf Stromlinienkoordinaten zu transformieren.

$$\tilde{g}_s = \frac{(\Gamma_{es} - z)\cos i}{r^3} + \frac{1}{r^3}\left(r_0 - r + \eta\Gamma_{es}{r_c}^3\right)\sin i \tag{4.95}$$

$$g_n = -\frac{(\Gamma_{es} - z)\sin i}{r^3} - \frac{1}{r^3}\left(r_0 - r + \eta\Gamma_{es}{r_0}^3\right)\sin i \tag{4.96}$$

Setzten wir aus Gründen der Übersichtlichkeit $\eta = 1$ und $r = r_0 = r_c$, dann ist der kritische Punkt bei

$$z_c = \Gamma_{es}\left(1 + r^3 \tan i\right) \tag{4.97}$$

und die Ableitung von $\tilde{g}_s$ ist $d/ds = \cos i\partial/\partial z + \sin i\partial/\partial r + \tilde{g}_n/c_s^2\partial/\partial i$, also

$$v_s'^2 = \frac{\Gamma_{es}\tan i\,(\tan\, i\; -\; 1)}{2c_s^2} - \frac{1}{2r^3}. \tag{4.98}$$

Wir sehen, daß bei hinreichend großem Winkel die Bedingung für v_s' zu erfüllen ist. Allerdings wurde bei dieser Herleitung ein wichtiger Punkt nicht berücksichtigt, nämlich daß, wenn die Flußröhre geknickt wird, auch der Querschnitt derselben kleiner werden muß.

Dies wollen wir jetzt in unserem letzten Schritt nachholen. Dazu benutzen wir die schon früher motivierte Näherung des Geometriefaktors a aus (4.73) in der Näherung $r \approx r_0$ und $z \approx z_0$, dann reduziert sich der Ausdruck (4.77) auf die einfache Form $a'/a = -\tilde{g}_n/v_s^2\,\tan\, i$.

$$\tilde{g}_s = g_s^{rad} - g_s^{grav} - \frac{{c_s}^2}{{v_s}^2}\tilde{g}_n \tan i \tag{4.99}$$

Dadurch, daß hier explizit $\tilde{g}_n$ mit dem Faktor $\tan i$ auftritt, heben sich alle radialen Beiträge gegenseitig auf, wenn man $\tilde{g}_n$ einsetzt und von Stromlinien- auf Zylinderkoordinaten zurücktransformiert (4.48). Übrig bleiben nur noch die vertikalen Komponenten von $\tilde{g}_{s/n}$

$$\tilde{g}_s = -\frac{g_z^{grav} - g_z^{rad}}{\cos i} \tag{4.100}$$

Dabei sind explizite Abhängigkeiten von Strahlungsdruck und Gravitation noch gar nicht eingegangen, diese gebrauchen wir erst jetzt bei der Bestimmung von z_c und v_s'.

$$\tilde{g}_s = \frac{\Gamma_{es} - z}{r^3 \cos i} \tag{4.101}$$

Was uns direkt wieder auf denselben kritischen Punkt wie bei der ersten (vertikalen) Scheibenwindnäherung bringt,

$$z_c = \Gamma_{es} \tag{4.102}$$

einschließlich der Schlußfolgerung für die Existenz eines kritischen Punktes, denn auch hier hat wieder der Geschwindigkeitsgradient keine reelle Wurzel.

$$v_s'^{\,2} = -\frac{1}{2r^3} \tag{4.103}$$

Hinzu kommt, daß auch die Gleichung $\tilde{g}_n = 0$ kein Lösung hat, denn es gilt grundsätzlich

$$\tilde{g}_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tan i = \frac{g_r^{rad} - g_r^{grav}}{g_z^{rad} - g_z^{grav}} \tag{4.104}$$

Wenn also $g_z^{rad} = g_z^{grav}$ ist, wie hier am kritischen Punkt, dann wird der Nenner zu 0 und $i \to \pi/2$, was eine unendlich dünnen Röhre bedeuten würde. Der Gleichgewichtszustand, bei dem keine Biegung mehr erfolgt, wird also erst bei einer zu Scheibe parallelen Strömung erreicht – eine unglaubwürdige Konfiguration.

Was wir also durch Hinzunahme der Biegung der Flußröhre gewonnen haben geht uns, gleichsam durch die Hintertüre, durch die Verengung des Röhrenquerschnittes wieder verloren. *Ein Übergang vom subsonischen in den supersonischen Bereich ist für Thomsonwinde direkt über einer Scheibe mit den bisher verwendeten Ingredienzen also offensichtlich nicht möglich.*

4.3.3 Erste Windrechnungen

Diese Schlußfolgerung wird von den numerischen Rechnungen mit dem Programm HFAWIND bestätigt. In der Tat ließ sich bei Verwendung des variablen Geometriefaktors (4.73) am kritischen Punkt keine reelle Wurzel für den Geschwindigkeitsgradienten finden. Auch eine Überschallösung mit den Startbedingungen $\tilde{g}_s = 0$ und $\tilde{g}_n$ war in Übereinstimmung mit (4.104) nicht zu finden dies, hätte dem Gedanken entsprochen, daß sich schon in der Nähe des kritischen Punktes, bzw. kurz nach dem Start des Windes, die vertikalen Kräfte im Gleichgewicht befinden.

Die einzigen reellen Lösungen genau am kritischen Punkt ergaben sich dann auch nur für die Konfiguration, wo der Geometriefaktor proportional zum Radius war $a = r/r_0$ (Scheibengeometrie), mit der Folge, daß a'/a verschwindend klein wurde und die Situation, welche (4.98) zu Grunde lag, gegeben ist. Es zeigt sich, daß reelle Wurzeln sogar für den Fall $i = 0°$ existieren, was wegen der Näherungen bei der analytischen Lösung dort nicht deutlich wurde.

Verfolgt man aber den weiteren Verlauf des Windes und löst die Differentialgleichungen, stellt man fest, daß sich sehr schnell unrealistische, aber auch sehr aufschlußreiche Lösungen einstellen. Der Wind wird von den vertikalen Kräften sehr schnell in die Waagerechte umgebogen und abgebremst, so daß ein Übergang bis ins Unendlich nicht möglicht ist.

Dieses Verhalten wird leicht verständlich, wenn man bedenkt, daß sich der Wind oberhalb des kritischen Punktes befindet, d.h. die Gravitationskraft überwiegt die Strahlungskraft. Beim senkrechten Anstieg wirkt in vertikaler Richtung, aufgrund der Zentrifugalkraft, zunächst nur der nach außen gerichtete Strahlungsdruck und bewirkt eine Biegung der Stromlinie zur Scheibe hin. Je größer aber die Biegung ist, desto stärker wirkt auch die vertikale Komponente der Schwerkraft, die im bisherigen Bild nur von der vertikalen Komponente des Strahlungsdruckes balanciert wird. Jenseits des kritischen Punktes ist letztere aber kleiner als die Gravitationskraft, mit der Folge, daß alle Stromlinien auf die Photosphäre zurückgedrückt werden. Eine unentrinnbare Falle für alle Scheibenwinde also?

Nun, der Schlüssel zur Lösung dieses Problems ist das Problem selber. Denn tatsächlich wurde bei den obigen Rechnungen eine wichtige Approximation der HFA in grober Weise verletzt. Die starke Biegung der einzelnen Stromlinien bedeutet nämlich, daß sich auf engstem Raum die Stromlinien von verschiedenen Scheibenbereichen geradezu stapeln, im Grenzfall also unendlich viele Stromlinien auf einem unendlich dünnen Raum zusammengepreßt sind. Das kann natürlich nicht sein, denn der *transversale Druckgradient*, den wir bisher vernachlässigt haben, wird an diesem Punkt von immenser Bedeutung und dazu führen, daß die oben beschriebene Situation nicht eintritt.

4.4 Thomsonwind mit transversalem Druckgradient

Nachdem wir nun festgestellt haben, daß der transversale Druckgradient nicht vernachlässigbar ist, und unser Näherung $\partial P/\partial n = 0$ nicht haltbar ist, müssen wir eine geeignete Näherung finden, diesen zu beschreiben. Eine numerische Lösung der partiellen Differentialgleichungen würde den vorgegebenen Rahmen sprengen und zum jetzigen Zeitpunkt auch nur wenig zum physikalischen Verständnis strahlungsgetriebener Scheibenwinde beitragen.

Erinnern wir uns daher kurz an die Transformation der Differential-Ausdrücke bei der Herleitung der Stromlinienkordinaten. Die Gleichungen (4.22-4.25) zeigten, wie man Stromlinienkoordinaten auf Zylinderkoordinaten transformiert und umgekehrt. Für den tranversalen Druckgradienten verwenden wir jetzt eine Mixtur beider Koordinatensysteme. Denn setzt man (4.25) in (4.23) ein, dann erhält man den transversalen Druckgradienten ausgedrückt durch den longitudinalen Gradienten und den radialen Gradienten.

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{\cos i}\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \sin i \frac{\partial f}{\partial s}\right) \tag{4.105}$$

Schauen wir uns diesen Ausdruck genauer an: Verläuft die Strömung parallel zur z-Achse ($i = 0°$), dann ist der tranversale Gradient identisch mit dem radialen — die Stromlinienkoordinaten sind identisch mit Zylinderkoordinaten. Neigt sich die Stromlinie, dann wird zunehmend der longitudinale Gradient wichtiger. Am Beispiel identischer Stromlinien wird das einsichtig. Mathematisch bedeutet dieser Fall nämlich, daß der radiale Gradient überall wegfällt, weil dann radial an jeder Stelle über der Scheibe die gleichen physikalischen Bedingungen herrschen müssen. Bewegt man sich in einem solchen Fall tranversal zur Stromlinie (hier: nach rechts unten) von einer Stromlinie zur nächsten, dann landet man, was die physikalischen Bedingungen anbelangt, wieder auf derselben Stromlinie, allerdings an einem, um eine Strecke $\Delta s = -\tan i\ \Delta n$, veschobenen Ort. Wie im richtigen Leben ist auch in diesem Modell ein Seitensprung in Wirklichkeit ein Rückschritt.

Lokal werden diese Bedingungen wohl schon sehr gut erreicht sein, denn wir wissen, daß die longitudinalen Gradienten im entscheidenen Nahbereich über der Scheibe sehr groß sind und somit den entscheidenden Beitrag zum tranversalen Gradienten geben werden. Eine erste gute Näherung wäre also

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\partial f}{\partial s}\tan i. \tag{4.106}$$

Noch besser wird diese Näherung, wenn man den radialen Gradienten etwas genauer abschätzt, denn auch diesem stehen wir nicht völlig hilflos gegenüber. Natürlich werden auch lokal die Stromlinien nicht völlig identisch sein, da aber alle einwirkenden Kräfte und Anfangsbedingungen im Prinzip als Potenzgesetze des Radius eingehen und ansonsten die gleiche Struktur haben, werden sich, außer vielleicht an den Rändern der Scheibe, alle Stromlinien ähneln. Diese *Selbstähnlichkeit* der Stromlinien wird sich dadurch ausdrücken, daß Form und physikalischer Zustand von Stromlinien durch eine Transformation T — im einfachsten Fall durch einen Skalenfaktor — ineinander übergehen $f(r_1) = T(r_1) \circ f(r_2)$. Der radiale Gradient einer Funktion ist dann durch den radialen Gradienten dieser Ähnlichkeitstransformation gegeben. Die Bestimmung derselben kann durch einen einfachen, z.B. aus den Scheibengleichungen abgeleiteten, Ansatz mit anschließender Iteration der Parameter geschehen. Definieren wir deshalb einen Skalenparameter ξ, so daß $\rho(r,s) = r^{\xi}\rho(s)$ ist.

4.4.1 Die Eulergleichung mit tranversalem Gradienten

Mit der oben skizzierten Methode kann nun auch die n-Komponente der Eulergleichung (4.56) vervollständigt werden. Dabei betrachten wir wieder einen isothermen Wind und benutzen den Skalenfaktor ξ und die Kurzschreibweise $\rho = \rho(s)$

$$\Rightarrow v_s^2 \frac{\partial i}{\partial s} = -g_n^{grav} + g_n^{rad} - \frac{{c_s}^2}{\cos i \rho(r,s)}\left(\frac{\partial \rho(r,s)}{\partial r} - \frac{\partial \rho(r,s)}{\partial s}\sin i\right). \tag{4.107}$$

Wegen der Massenerhaltung können wir die Dichte jetzt wieder durch die Geschwindigkeit und den Geometriefaktor ausdrücken (4.67). Auch die partiellen Ableitungen können wieder als totale Ableitungen geschrieben werden.

$$i' {v_s}^2 = g_n^{rad} - g_n^{grav} - {c_s}^2 \left(\frac{\xi}{r \cos i} + \frac{a'_s \tan i}{a} + \frac{v'_s \tan i}{v_s} \right) \tag{4.108}$$

Als letzten Schritt setzen wir jetzt die Approximation des Geometriefaktors a (4.73), dessen Gradient (4.77) selber wieder von i' abhängig ist, in die Eulergleichung ein und formen um.

$$i' v_s = \frac{\left(g_n^{rad} - g_n^{grav}\right) v_s - \frac{{c_s}^2 v_s \xi}{r \cos i} - {c_s}^2 v'_s \tan i - {c_s}^2 \tilde{a}_s v_s \tan i}{{v_s}^2 - {c_s}^2 \tan i^2} \tag{4.109}$$

$$v'_s = \frac{v_s \left(g_s^{rad} - g_s^{grav} + {c_s}^2 \left(\tilde{a}_s - i' \tan i\right)\right)}{-{c_s}^2 + {v_s}^2} \tag{4.110}$$

$$\frac{a'_s}{a} = \tilde{a}_s - i' \tan i \tag{4.111}$$

Dabei ist $\tilde{a}$ der nicht von i' abhängende Teil der Gleichung (4.77). Die beiden Komponenten der Eulergleichung, die wir jetzt erhalten haben (4.110, 4.109), bilden ein Gleichungssystem für v'_s und i', das sich zum Glück auflösen läßt.

$$v'_s = v_s \frac{\tan i \frac{c_s^2}{v_s^2} \left(\frac{c_s^2 \xi}{r \cos i} + \tan i \, c_s^2 \tilde{a}_s - \tilde{g}_n \right) + \tilde{g}_s \left(1 - \tan i^2 \frac{c_s^2}{v_s^2} \right)}{{v_s}^2 - \frac{{c_s}^2}{\cos i^2}} \tag{4.112}$$

$$i' v_s = v_s \frac{\left(1 - \frac{c_s^2}{v_s^2}\right) \left(\tilde{g}_n - \frac{c_s^2 \xi}{r \cos i} - \tan i \, c_s^2 \tilde{a}_s \right) - \tan i \tilde{g}_s \frac{c_s^2}{v_s^2}}{v_s^2 - \frac{c_s^2}{\cos i^2}} \tag{4.113}$$

Hier sind die rein ortsabhängigen Terme der Beschleunigung zusammengefaßt.

$$\tilde{g}_s = g_s^{rad} - g_s^{grav} + {c_s}^2 \, \tilde{a}_s \tag{4.114}$$

$$\tilde{g}_n = g_n^{rad} - g_n^{grav} \tag{4.115}$$

4.4.2 Kritischer Punkt

Zwar sind die Gleichungen etwas komplizierter geworden, aber ihre grundsätzliche Struktur hat sich nicht geändert. Der kritische Punkt ist erhalten geblieben. Scheinbar gewinnen wir sogar noch eine wertvolle zusätzliche Information, denn auf einmal haben sowohl die s-, als auch die n-Gleichung einen kritischen Punkt, und das bei derselben Geschwindigkeit, die aber nicht mehr die Schallgeschwindigkeit ist. Wir nennen deshalb diese Geschwindigkeit, bei der beide Nenner Null werden, jetzt die kritische Geschwindigkeit $v_c = c_s / \cos i$.

Beim Passieren der kritischen Geschwindigkeit müssen aus den bekannten Regularitätsgründen beide Zähler gleich Null sein. Gelingt es auf diese Weise, durch die zusätzliche Gleichung, neben dem Ort und der Geschwindigkeit auch noch den Winkel am kritischen Punkt zu bestimmen?

Am kritischen Punkt gelten zunächst folgende Bedingungen

$$v_s = \frac{c_s}{\cos i} \tag{4.116}$$

Setzt man diese Gleichung in den Zähler der n-Gleichung, dann findet man drei Nullstellen für $\tan i$

$$\tan i = 0 \tag{4.117}$$

und

$$\tan i = \frac{\tilde{g}_n \pm \sqrt{\tilde{g}_n^2 - 4\, {c_s}^2\, \tilde{a}_s\, \tilde{g}_s}}{2\, {c_s}^2\, \tilde{a}_s} \tag{4.118}$$

umgekehrt kann man natürlich auch zuerst nach $\tan i$ auflösen, und erhält dann

$$\tan i = \frac{\left(v_s^2 - c_s^2\right)}{c_s^2} \frac{\tilde{g}_n}{\tilde{g}_s + \left(v_s^2 - c_s^2\right) \tilde{a}_s} \tag{4.119}$$

bzw.

$$\tilde{g}_n = \frac{\tilde{g}_s + {c_s}^2 \tilde{a}_s \tan i^2}{\tan i} \tag{4.120}$$

Die erste Lösung $\tan i = 0$ ist uns schon wohl bekannt und liefert eingesetzt in den Zähler der s-Gleichung für dessen Nullstelle die Bedingung

$$\tilde{g}_s = 0 \tag{4.121}$$

Wie sehen nun die Nenner unserer Differentialgleichungen am kritischen Punkt aus? Dazu ist es sehr instruktiv, wieder die Komponenten der Beschleunigung in Zylinderkoordinaten (4.48) und die kritsche Geschwindigkeit einzusetzten, dann stellt sich nämlich heraus, daß, wenn der Nenner Null sein soll, folgende Bedingungen gelten müssen:

$$0 = r\left(c_s^2 \tilde{a}_s - g_z^{grav} \cos i + g_z^{rad} \cos i\right) + c_s^2 \xi \sin i \tag{4.122}$$

$$0 = c_s^2 \xi \sin i^2 + r\left(c_s^2 \tilde{a}_s \sin i - g_z^{grav} \cos i \sin i + g_z^{rad} \cos i \sin i\right) \tag{4.123}$$

Tatsächlich sind somit aus zwei Bedingungsgleichungen wieder eine geworden, denn beide Gleichungen sind identisch; außer wenn $i = 0°$ ist, dann ist die zweite Gleichung trivialerweise erfüllt und die erste wird unabhängig vom Skalenparameter. D.h. der Winkel i der Strömung ist immer noch völlig unbestimmt. Wenn ein Thomson Wind existiert, muß es weitere übergeordnete physikalische Gründen geben, die letztlich den kritischen Punkt eindeutig definieren.

Darüberhinaus läßt sich aber etwas über die räumliche Lage des kritischen Punktes sagen — sofern er existiert. Wie auch schon bei der Situation ohne Berücksichtigung des tranversalen Druckgradientens, werden am kritischen Punkt die Bedingungen alleine von den vertikalen Kraftkomponenten bestimmt. Mit der Folge, daß auch der kritische Punkt immer in der Nähe der Photosphäre liegt, wie sie in der Akkretionscheibentheorie definiert wird, nämlich als Gleichgewicht zwischen vertikalem Strahlungsdruck und Gravitationkraft. Die Terme $c_s^2 \tilde{a}_s$ und $c_s^2 \xi$ sind nämlich im allgemeinen deutlich kleiner als die Beschleunigung durch Gravitation und Strahlung.

Die linearisierte Gleichung

Zur Berechnung der Gradienten der Geschwindigkeit und des Winkels am kritischen Punkt greift dasselbe Konzept wie bei den herkömmlichen kritischen Punkten aus den vorangegangenen Abschnitten. Die Prozedur ist wie folgt: Zuerst werden alle Kräfte in Zylinderkoordinaten ausgedrückt, dann werden Zähler und Nenner durch ihre Ableitungen nach s ersetzt, unter Berücksichtigung der Tatsache, daß beide von r, z, i und v abhängen, wodurch man neue Terme mit i' und v' auf der rechten Seite bekommt. Erst anschließend kann man die Geschwindigkeit durch die kritische Geschwindigkeit (4.116) ersetzen und benutzen, daß der Zähler am kritischen Punkt gleich Null ist (4.122). Formt man dann beide Gleichungen um, ergibt sich ein neues Gleichungssystem für v' und i'.

$$i' = -\frac{{v_s'}^2 + v_s' g_1 + g_4}{v_s' g_2 + g_3} \tag{4.124}$$

$$v_s' = -\frac{i'^2 g_2 + i' g_5 + g_7}{i' + g_6} \tag{4.125}$$

mit den Faktoren

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{\cos i \sin i}{c_s}\left(\frac{c_s^2\xi}{r} - g_r\right) && (4.126)\\
g_2 &= -c_s\frac{\tan i}{\cos i} && (4.127)\\
g_3 &= \xi\left(\frac{-3c_s^2}{2r\cos i} + \frac{c_s^2\cos i}{r}\right) - \frac{c_s^2\tilde{a}_s\sin i}{2\cos i} + \frac{g_r\sin i^2}{\cos i} && (4.128)\\
g_4 &= \frac{1}{2}\left(\frac{c_s^2\xi\sin i^2}{r^2} - c_s^2\tilde{a}_s' - g_z'\cos i\right) && (4.129)\\
g_5 &= \frac{\cos i}{2c_s}\left(c_s^2\tilde{a}_s\left(\cos i^{-2} - 1\right) + 2g_r\sin i + \frac{c_s^2\xi\left(\cos i^{-2} - 2\right)\sin i}{r}\right) && (4.130)\\
g_6 &= \frac{\cos i^3}{c_s^2}\left(\frac{c_s^2\xi}{r} - g_r\right) && (4.131)\\
g_7 &= \frac{\sin i}{2c_s}\left(c_s^2\tilde{a}_s' + g_z'\cos i - \frac{c_s^2\xi\sin i^2}{r^2}\right) && (4.132)\\
g_r &= g_r^{rad} - g_r^{grav} && (4.133)\\
g_z &= g_z^{rad} - g_z^{grav}. && (4.134)
\end{aligned}$$

Schauen wir uns jetzt zwei Spezialfälle an, wobei wir zuerst wissen wollen, wie sich die Gleichung beim einfachsten Modell verhält, dem des senkrechten Aufstieges. Wir setzten $i' = 0$ und siehe da, die Faktoren schwinden dahin.

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0 && (4.135)\\
g_2 &= 0 && (4.136)\\
g_3 &= \frac{-\left(c_s^2\xi\right)}{2r} && (4.137)\\
g_4 &= \frac{-g_z' - c_s^2\tilde{a}_s'}{2} && (4.138)\\
g_5 &= 0 && (4.139)\\
g_6 &= \frac{-g_r + \frac{c_s^2\xi}{r}}{c_s^2} && (4.140)\\
g_7 &= 0 && (4.141)
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die beiden Gleichungen ergibt sich genau dasselbe Bild wie bei der einfachen Betrachtung ohne Berücksichtigung des tranversalen Gradientens, was nicht verwundert, denn dieser spielt bei $i = 0°$ kaum eine Rolle. Dies liefert uns

$$v_s' = 0 \tag{4.142}$$

$$i' = -\frac{g_z' r + c_s^2\tilde{a}_s' r - 2v_s'^2 r}{c_s^2\xi} \tag{4.143}$$

was natürlich keine befriedigende Lösung ist, da dies bedeutet, daß die Geschwindigkeit nicht mehr anwächst, also auch nicht mehr über die kritische Geschwindigkeit gelangen kann. Hinzu kommt, daß durch die vorhandene Beugung die kritische Geschwindigkeit weiter hinaus geschoben wird. Ohne den Skalenparameter ξ kommt der Wind vollständig zum Erliegen, da i' unendlich groß wird.

Ähnlich einfach und übersichtlich wird die Lösung des Systems, wenn man alle “kleinen” Terme wegläßt. Hier bedeutet das $\tilde{a}_s = \tilde{a}'_s = \xi = 0$. Deren Beiträge sind normalerweise um mehr als eine Größenordnung kleiner als die von Strahlungskraft und Gravitation, mit denen sie in einer Summe stehen.

$$g_1 = -\frac{g_r \cos i \sin i}{c_s} \tag{4.144}$$

$$g_2 = -\frac{c_s \sin i}{\cos i^2} \tag{4.145}$$

$$g_3 = \frac{g_r \sin i^2}{\cos i} \tag{4.146}$$

$$g_4 = \frac{-(g'_z \cos i)}{2} \tag{4.147}$$

$$g_5 = \frac{g_r \cos i \sin i}{c_s} \tag{4.148}$$

$$g_6 = -\frac{g_r \cos i^3}{c_s^2} \tag{4.149}$$

$$g_7 = \frac{g'_z \cos i \sin i}{2c_s} \tag{4.150}$$

$$i' = \frac{g_r \cos i^3}{c_s^2} + \frac{\sqrt{g'_z} \cos i^{\frac{3}{2}} \sin i}{\sqrt{2} c_s} \tag{4.151}$$

$$v'_s = -\frac{\sqrt{g'_z} \cos i^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{g_r \cos i \sin i}{c_s} \tag{4.152}$$

Der Term, auf den es ankommt, ist wiederum der Gradient der vertikalen Kräfte g'_z, dieser ist direkt über Scheiben in der einfachen Theorie negativ, unsere Gleichungen haben also keine reellen Lösungen. *Ein kritscher Punkt existiert in diesem System nicht.* Aber natürlich gäbe es hier vielleich doch noch Möglichkeiten, zu einer Lösung zu kommen, wenn man ausgefeiltere Modelle verwendet. Rechnet man nämlich die Strahlungskraft über einer dünnen Scheibe explizit aus, wie wir das in Kap.3 getan haben, dann stellt man fest, daß es auch über der Scheibe ($z > 0.1r$) Bereiche gibt, in denen die Strahlungskraft recht deutlich ansteigt, unter Umständen sogar stärker als die Gravitation. Da aber am kritischen Punkt der Zähler Null sein muß, führt dies dazu, daß an dieser Stelle der Betrag des Gradienten der Strahlungskraft kleiner ist, als der der Gravitation. Schließlich startet die Gravitation bei $z = 0$ mit einem niedrigerem Wert, als die Strahlungskraft. Dementsprechend konnten auch mit numerischen Rechnungen, der vollen Gleichungen keine Lösungen gefunden werden. Natürlich könnte sich diese Situation ändern, wenn man den Strahlungstransport in der optisch dicken Scheibe mitrechnet und nicht von einer unendlich dünnen Scheibe ausgeht. Denn dann startet auch die nach außen gerichtete Strahlungskraft bei $z = 0$ beim Wert Null und nimmt nach außen hin zu. Man würde dann Scheibe und Wind als eine Gesamtheit rechnen müssen.

Kapitel 5

Liniengetriebene Winde

Bisher haben wir uns bei der Betrachtung der Strahlungskraft auf den Thomson Absorptionskoeffizienten beschränkt. Doch aus der Untersuchung von Sternwinden weiß man, daß der dominierende Beitrag zur Strahlungskraft *für Winde* in dem hier relevanten Temperaturbereich aus der Absorption in Linien kommt [Lucy und Solomon 1970]. Daraufhin haben [Castor *et al* 1975] eine Methode entwickelt, die nach den Autoren als CAK-Theorie bezeichnet wird, mit deren Hilfe dieser Beitrag durch statistische Mittelung über alle Linien leicht behandelbar wurde. Diese Methode wurde dann von [Pauldrach *et al* 1986] und in nachfolgenden Arbeiten [Puls und Pauldrach 1990, Pauldrach 1987, Puls 1987, Gabler *et al* 1989, Pauldrach und Puls 1990, Abramowiccz *et al* 1990] noch erweitert bzw. in ihren Ergebnissen bestätigt und ist bis heute in ihren Grundzügen immer noch eine gute Beschreibung liniengetriebener Winde geblieben. Sie diente auch als Grundlage für die Beschreibung liniengetriebener Scheibenwinde, wie sie schon einmal in einer sehr vereinfachten Geometrie von [Shlosman *et al* 1985, Vitello und Shlosman 1988] gerechnet worden sind. Hierbei lag der Schwerpunkt aber bei der Behandlung der Ionisationsstruktur, die anhand weniger ausgewählter Linien diskutiert wurde.

In den nächsten Abschnitten wird deshalb zuerst die CAK-Theorie der Sternwinde erläutert und dann auf die Scheibensituation unter voller Berücksichtigung der Geometrie erweitert. Zum Schluß werden noch kurz die Konsequenzen für die hydrodynamischen Gleichungen in der HFA gezogen und deren neue Struktur diskutiert.

5.1 Die CAK-Theorie der Sternwinde

Eine hilfreiche Methode, um den Einfluß einer Absorptionslinie in einem beschleunigten Medium zu beschreiben, ist die Sobolev-Approximation [Sobolev 1960, Rybicki und Hummer 1978].

Der entscheidende Gedanke bei dieser Approximation ist, daß durch den starken Geschwindigkeitsgradienten im absorbierenden Material die Wechselwirkung einer Linie mit einem Frequenzbereich der unterliegenden Kontinuumsstrahlung auf einen räumlich stark lokalisierten Bereich beschränkt ist. Betrachtet man nämlich eine beliebige, aber feste Frequenz ν des Kontinuums und eine Linie der Frequenz $\nu_l > \nu$ in einem Volumenelement, so wird letzteres durch den Strahlungsdruck beschleunigt. Die Linienfrequenz ν_l wird solange rotverschoben, bis es in einem bestimmten Bereich z bis $z + dz$ zur Resonanz zwischen der Kontinuumsfrequenz und der Doppler-verschobenen Linie kommt. Vor und hinter diesem Bereich kommt es zu keiner Absorption, wenn nicht weitere Linien zufällig in diesen Bereich fallen, was hier aber vernachlässigt wird. $\tau(z)$ hat dann die Form einer Treppenfunktion, die im Resonanzbereich von Null auf den maximalen Wert steigt. Wichtig ist hierbei, daß der Resonanzbereich dz deutlich kleiner ist als die Skala, auf der sich die makroskopischen Zustandsgrößen des Gases ändern.

Die Opazität einer Linie l ist analog zu (3.23) definiert als

$$\chi_l = \rho k_l. \tag{5.1}$$

Die Beschleunigung durch Linienabsorption ergibt sich wieder aus (3.28). Allerdings wird jetzt noch berücksichtigt, daß durch die Absorption in den Linien die Intensität im Resonanzbereich nach außen abnimmt, und zwar um den Faktor $e^{-\tau_l(z,\theta)}$, wobei τ_l die optische Tiefe des Resonanzbereiches der Linie l ist. Dadurch ergibt sich eine von τ_l abhängige Beschleunigung.

$$g_{\vec{rad}}(\nu, \tau_{l'}, l) = \frac{1}{c\rho} \iint I_\nu(\theta)\chi(z,\nu,l)e^{-\tau_l'}\vec{n}\, d\Omega\ d\nu \tag{5.2}$$

Da der Resonanzbereich relativ klein sein soll, reicht es, einen mittleren Impulsübetrag in diesem Bereich anzugeben, bei dem für jeden Strahl über alle τ gemittelt wird, und der besondere (Treppen-) Charakter der optischen Dicke berücksichtigt wird.

$$g_{\vec{rad}}(\nu, l) = \frac{1}{c\rho} \iint \frac{\int_0^{\tau_l} I_\nu(\theta)\,\chi_l(z,\nu)e^{-\tau_l'}\vec{n}\, d\tau_l'}{\int_0^{\tau_l} d\tau_l'}\, d\Omega\ d\nu \tag{5.3}$$

$$\Rightarrow g_{\vec{rad}}(\nu, l) = \frac{1}{c\rho} \iint \frac{1-e^{-\tau_l}}{\tau_l}\ I_\nu(\theta)\,\chi_l(z,\nu)\vec{n}\, d\Omega\ d\nu \tag{5.4}$$

Der Absorptionskoeffizient einer Linie l läßt sich nun einfach in ein Produkt aus frequenzabhängiger Linienform ϕ (z.B. Gaußprofil mit Dopplerbreite ν_D und Zentrum bei ν_0) und ortsabhängigem Absorbtionskoeffizient $\bar{\chi}$ aufspalten,

$$\chi_l(z,\nu) = \phi(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D})\bar{\chi}(l,z) \tag{5.5}$$

wobei

$$\bar{\chi}(l) = \rho\bar{k}_l \tag{5.6}$$

und die Linienbreite $\Delta\nu$ durch die thermische Verbreiterung, d.h. die thermische Geschwindigkeit v_{th} im Gas gegeben ist.

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0 v_{th}}{c} \tag{5.7}$$

Der Einfachheit halber nähert man ϕ als Rechteckfunktion mit einer Breite $\Delta\nu_D$, die sehr klein ist gegenüber der Änderung der Intensität in diesem Frequenzintervall, so daß man diese als konstant und gleich $I(\nu_0)$ betrachten kann. Zusätzlich betrachten wir die Intensität als winkelunabhängig. Die Integration von (5.4) über alle Frequenzen und Einsetzten von (5.6) liefert dann den Strahlungsdruck für eine einzelne Linie.

$$g_{\vec{rad}}(\nu, l) = \frac{\Delta\nu_D\bar{k}_l}{c} \int \frac{(1-e^{-\tau_l})}{\tau_l} I_l\vec{n}\, d\Omega \tag{5.8}$$

Als nächsten Schritt muß jetzt noch die optische Tiefe des Resonanzbereiches angegeben werden. Ohne zu sehr in die Details der Sobolev-Approximation einzusteigen, kann man sich aus Dimensionsgründen überlegen, daß die charakteristische Länge der Strahlungswechselwirkung durch $v_{th}(dv_s/dz)^{-1}$ gegeben ist. Die optische Dicke τ_l von Linien in Überschallwinden ergibt sich dann zu

$$\tau_l = \frac{\rho v_{th} k_l}{\frac{dv}{dz}} \tag{5.9}$$

und ist *umgekehrt proportional zum Geschwindigkeitsgradienten*, wenn nur radial strömende Photonen berücksichtigt werden. Spielen darüberhinaus noch schräg einfallende Photonen eine Rolle, so ist diese Formel im sphärischen Fall der Sternwinden zu erweitern [Pauldrach *et al* 1986].

$$\tau_l(\tilde{\theta}) = \frac{\rho v_{th} k_l}{\cos\tilde{\theta}^2 \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{v}{z}\sin\tilde{\theta}^2} \tag{5.10}$$

Hierbei ist $\tilde{\theta}$ der Winkel zwischen dem Wellenvektor und dem Expansionsvektor, k_l ist die Linienstärke bzw. Opazität einer Linie (vgl. Gl. 3.23) und v_{th} ist die mittlere thermische Geschwindigkeit der Gasteilchen (Ionen). Wenn man eine Maxwellverteilung annimmt, dann ist [Lang 1974, S. 52] (m =Teilchenmasse)

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3Tk_B}{m}} \tag{5.11}$$

Als letztes ersetzt man nun τ_l durch eine optische Tiefenskala t, die unabhängig von der Linienstärke k_l der einzelnen Linie ist und die man ins Verhältnis zur Thomsonopazität setzt (vgl. 3.33).

$$\tau_l = \frac{t\bar{k}_l}{\kappa^{Th}} \tag{5.12}$$

$$\Rightarrow t = \frac{n\sigma_{Th}v_{th}}{\frac{dv}{dz}} \tag{5.13}$$

Das Verhältnis von Thomson- zu Linienopazität bezeichnen wir nun noch wie bei CAK mit β.

$$\beta = \frac{\kappa^{Th}}{\bar{k}_l} \tag{5.14}$$

$$\Rightarrow \tau_l = \frac{t}{\beta} \tag{5.15}$$

Auch die winkelabhängige optische Tiefenvariable für Sternwinde $\tau(\theta)$ läßt sich durch t ausdrücken.

$$\tau_l(\tilde{\theta}) = \frac{t\frac{dv}{dz}}{\beta\left(\frac{dv}{dz}\cos\tilde{\theta}^2 + \frac{v}{z}\sin\tilde{\theta}^2\right)} \tag{5.16}$$

Bei der Behandlung von Sternwinden ohne Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit der optischen Tiefe wird zur Bestimmung der gesamten Strahlungskraft nun über alle Linien summiert.

$$\vec{g_{rad}} = \sum_l \frac{\kappa^{Th}\Delta\nu_D}{c}\int \frac{1-e^{-\frac{t}{\beta}}}{t} I_l\vec{n}\, d\Omega \tag{5.17}$$

Es zeigt sich, daß $\vec{g}_{rad}$ als Funktion nur einer Variablen t geschrieben werden kann. Dabei definiert man den Kraftmultiplikator $M(t)$, der das Verhältnis der Absorption durch Linien zur Thomsonabsorption angibt, wie folgt:

$$M(t) = \sum_l \Delta\nu_D \frac{\vec{F}_l}{F}\frac{1-e^{-\frac{t}{\beta}}}{t}, \tag{5.18}$$

dabei ist

$$\vec{F} = \int\int I_\nu\,(\theta)\,\vec{n}\, d\Omega\;\, d\nu \tag{5.19}$$

der gesamte Strahlungsfluß des Kontiuums, und

$$\vec{F_l} = \int I(l,\theta)\vec{n}\, d\Omega \tag{5.20}$$

der Fluß in einem Frequenzintervall um die Linienfrequenz der Linie l an einem Ort über der Scheibe. Wird nun t weiterhin als winkelunabhängig angenommen, dann kann die Integration in (5.17) leicht ausgeführt werden. Man erhält mit der Definition (5.20)

$$\vec{g_{rad}} = \sum_l \frac{\left(1-e^{-\frac{t}{\beta}}\right)\kappa^{Th}\Delta\nu_D\vec{F_l}}{ct} \tag{5.21}$$

$$\Rightarrow \vec{g_{rad}} = \frac{F\kappa^{Th}M(t)}{c} \tag{5.22}$$

was genau der Gl.(6) bei CAK entspricht.

Mithilfe von Listen atomarer Übergänge und der Annahme von Schwarzkörperstrahlung läßt sich die Funktion $M(t)$ nun tabellieren. Dabei ist es wichtig, eine möglichst vollständige Liste *aller* Linien zu verwenden. Betrachtet man nämlich den Multiplikator genauer, so kann man in ihm die folgende Näherung machen

$$\frac{1-e^{-\frac{t}{\beta}}}{t} \approx \min(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{t}), \tag{5.23}$$

welche besagt, daß der Multiplikator im optisch dünnen Fall $t \ll 1$ nicht mehr von der Stärke β der einzelnen Linien abhängt und somit die schwächeren Linien genausoviel beitragen, wie die starken Linien.

[Castor *et al* 1975] haben eine solche statistische Untersuchung durchgeführt und festgestellt, daß $M(t)$ für einen bestimmten Temperaturbereich durch ein Potenzgesetz der Form

$$M(t) = \frac{k}{t^\gamma} \tag{5.24}$$

wiedergegeben werden kann. Für Of-Sterne fanden sie die Parameter $k \approx \frac{1}{30}$ und $\gamma = 0.7$. Später hat [Castor *et al* 1975] diese Untersuchung verfeinert, so daß man jetzt für den Temperaturbereich $5\ 10^4\mathsf{K} \geq T_{eff} \geq 10^4\mathsf{K}$ guten Gewissens sagen kann

$$M(t) = 0.28t^{-0.56}\left(\frac{n}{10^{11}\mathsf{cm}^{-3}}\right)^{0.09}. \tag{5.25}$$

Da die optische Tiefe t aber abhängig ist vom Geschwindigkeitsgradienten kommen wir zu der wichtigen Feststellung, daß die Beschleunigung durch Linien proportional ist zu $(dv/dz)^{0.56}$.

5.2 Die besondere Situation bei Scheiben

Im Vergleich zu den liniengetriebenen Sternwinden gibt es bei Scheibenwinden schon in der Behandlung des Impulsübertrages in den Linien wichtige Unterschiede. Kann man bei Sternen von einem einfachen Schwarzkörperspektrum ausgehen, so ist das bei Scheiben ganz anders.

Schon im einfachen Modell ergibt sich das eingestrahlte Spektrum durch eine Überlagerung vieler Schwarzkörperspektren, die von verschiedenen Positionen auf der Scheibe emittiert werden. Wie müssen uns also Gedanken darüber machen, inwieweit das Konzept des Multiplikators einfach übernommen werden kann.

Z.B. kann man im Multiplikator nicht mehr mit dem Verhältnis F_ν/F, das durch die Annahme eines Schwarzkörperspektrums bisher für jede Linie implizit festgelegt war, arbeiten. Stattdessen müssen wir das Verhältnis der Intensitäten des eingestrahlten Kontinuums $I_l/\int_0^\infty I d\nu$ verwenden und erst dann über alle Raumwinkel integrieren, wie es [Pauldrach *et al* 1986] bei Sternen gemacht haben, als sie den endlichen Öffnungswinkel derselben berücksichtigten. Unser neuer Multiplikator lautet nun

$$M(t(\theta)) = \sum_l \Delta\nu_D \frac{I_l(\theta)}{I(\theta)} \frac{1-e^{-\frac{t(\theta)}{\beta}}}{t(\theta)} \tag{5.26}$$

$$\Rightarrow g_{rad} = \frac{\kappa^{Th}}{c}\int I(\theta)M(t(\theta))\, d\Omega\ . \tag{5.27}$$

Wenn wir davon ausgehen, daß von der Scheibe wirklich nur lokale Schwarzkörperspektren abgestrahlt werden, dann sind beide Definitionen des Multiplikators identisch, da sich Fluß und Intensität nur um den Faktor π unterscheiden (3.41).

Allerdings ist noch an einem weiterem Punkt Vorsicht geboten. Es ist nämlich zu klären, inwieweit der Multiplikator explizit temperaturabhängig ist, also von der Effektivtemperatur des eingestrahlten Spektrums abhängt.

5.2.1 Die Temperaturabhängigkeit des Multiplikators

Um die Temperaturabhängigkeit des Multiplikators zu untersuchen, müssen wir zunächst zwei Effekte unterscheiden. Zum einen bestimmt das eingestrahlte Spektrum, wie wir aus den Berechnungen der Gleichgewichtskurven (§3.4.2, S.49)wissen, in entscheidender Weise die Temperatur des Gases und damit die Ionisations- und Besetzungszustände. Die Parameter und Tabellen für $M(t)$ sind aber für ganz bestimmte Spektren, wie sie ein Stern abstrahlt, berechnet, ein Scheibenspektrum würde sicherlich zu einer Modifikation dieser Werte führen. Eine Behandlung dieser Thematik würde aber bei weitem den Rahmen dieser Arbeit sprengen, deshalb müssen wir den dadurch entstehenden quantitativen Fehler in Kauf nehmen. Es ist aber zu erwarten, daß sich am qualititativen Verständnis der Theorie, den wir beim jetzigen Stand anstreben, nichts grundsätzlich änderte, wenn wir den Multiplikator für Scheibenspektren neu berechneten.

Der zweite Effekt beruht auf der Frage, ob sich der Multiplikator ändert, wenn der Zustand des Gases konstant bleibt, sich aber die Effektivtemperatur des eingestrahlten Spektrums ändert. Hier hilft aber eine einfache Abschätzung, die auf statistischen Argumenten basiert. CAK machen z.B. für die Fehlerabschätzung bei der Berechnung des Multiplikators den einfach Ansatz, daß die Anzahl N der Linien über ein logarithmisches Frequenzintervall gleichverteilt ist,

$$dN_\nu \propto \frac{d\nu}{\nu} = d\ln\nu\,, \tag{5.28}$$

Linienstärke und Frequenz statistisch unabhängig sind und die Verteilung der Linienstärken durch ein Potenzgesetz gegeben ist, so daß die Anzahl N_β der Linien mit Linienstärke β gegeben ist durch

$$dN_\beta \propto \frac{d\beta}{\beta^\alpha}, \tag{5.29}$$

Der Multiplikatior (5.18) selber ist von der Form

$$M = \sum_l \left(\frac{I_l}{I}\right) f(\beta)\Delta\nu_D(l), \tag{5.30}$$

wobei

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu v_{th}}{c} \tag{5.31}$$

v_{th} die thermische Geschwindigkeit der Ionen, c die Lichtgeschwindigkeit und ν die Zentralfrequenz der Linie l ist, bei der sie absorbiert wird. $f(\beta)$ ist der Teil unter der Summe, in den die direkten Linieneigenschaften eingehen.

$$f(\beta,t) = \min(\frac{1}{\beta},\frac{1}{t}) \tag{5.32}$$

Diese Funktion ist zwar auch eine Funktion der Frequenz, aber nur indirekt. Die skalierte Linienstärke β hängt natürlich von der Frequenz ab, aber aus der postulierten statistischen Unabhängigkeit von Frequenz und Linienstärke ergibt sich, daß, wenn man zwei verschiedene, ausreichend große Frequenzintervalle vergleicht, der Beitrag der Funktion f im Mittel gleich ist. Natürlich gilt die ganze Argumentation nur in einem endlichen, physikalisch sinnvollen Intervall, in dem Linien eine Rolle spielen.

Summiert man nun (5.30) über alle Frequenzen, dann sollte, wenn die Annahmen stimmen, das gleiche Ergebnis herauskommen, wie wenn man den Summanden über die Verteilungsfunktion integriert.

$$M(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Delta\nu_D(\nu)\frac{N_0 f(\beta)}{\nu\beta^\alpha}\frac{I_\nu}{I}\,d\nu\;d\beta \tag{5.33}$$

Da die thermische Dopplerbreite der Linie proportional zur Frequenz ist, kürzt sich ν heraus, wenn man (5.31) einsetzt. Es bleibt nur noch das Frequenzintegral über die Intensität übrig.

$$M(t) = \int_0^\infty \frac{N_0 v_{th} f(\beta)}{c\beta^\alpha}\int_0^\infty \frac{I_\nu}{I}\,d\nu\;d\beta \tag{5.34}$$

Nun war aber I so definiert, daß

$$I = \int_0^\infty I_\nu \, d\nu \,, \tag{5.35}$$

d.h. die Integration über die Frequenz ergibt eine 1, und

$$M(t) = \int_0^\infty \frac{N_0 v_{th} f(\beta)}{c\beta^\alpha} \, d\beta \,. \tag{5.36}$$

Die Integration über alle Linienstärken läßt sich dann sehr leicht ausführen, wenn man die Näherung 5.32 benutzt; das Integral spaltet sich auf

$$M(t) = \int_t^\infty \frac{N_0 \beta^{-(1+\alpha)} v_{th}}{c} \, d\beta + \int_0^t \frac{N_0 v_{th}}{ct\beta^\alpha} \, d\beta \tag{5.37}$$

$$\Rightarrow M(t) = -\frac{N_0 v_{th}}{(\alpha - 1)\, \alpha c t^\alpha} \tag{5.38}$$

und wir erhalten genau das Potenzgesetz (5.24), welches CAK durch explizite Summation gefunden haben. Die oben gemachten Annahmen und das Ergebnis von CAK sind also im gewissen Rahmen äquivalent, und

$$k = -\frac{N_0 v_{th}}{(-1 + \alpha)\, \alpha c}. \tag{5.39}$$

Wichtig für die Diskussion der Temperaturabhängigkeit von M ist aber hier nicht nur die Gültigkeit des statistischen Argumentes, sondern auch die Erkenntnis, daß sich die Frequenzabhängigkeit und die Abhängigkeit vom Spektrum herauskürzt und M in dieser Formulierung keine Abhängigkeit von der Effektivtemperatur des einstrahlenden schwarzen Körpers oder überhaupt der Form des Spektrums hat. Wir können also den Multiplikator getrost in das Integral über die Raumwinkel hineinziehen und der Überlagerung der Spektren dadurch Rechnung tragen, daß man die entsprechenden Multiplikatoren überlagert.

Bestätigt wird diese Überlegung von [Abbot 1982], der festgestellt hat, daß im Bereich der Effektivtemperaturen von 10^5 bis $5\ 10^4$K der explizit berechnete Multiplikator fast keine Temperaturabhängigkeit zeigt, wohl aber eine Abhängigkeit von der Dichte (5.25).

5.2.2 Der Gradient in Stromlinienkoordinaten

Die zweite Besonderheit bei Scheibenwinden ist ihre zweidimensionale Struktur, die eine wichtige Rolle bei der Berechnung der optischen Tiefe t spielt. Diese hängt nämlich entscheidend vom Gradienten der Geschwindigkeit ab. Damit ist aber nicht der Gradient der Geschwindigkeit entlang der Stromlinie gemeint, sondern der Gradient, den ein Lichtstrahl sieht, wenn er die Strömung kreuzt, also den Gradienten entlang der Photonenbahn.

Bei Sternwinden, mit ihrer sphärischen Symmetrie[1] und der Annahme nur radial strömender Photonen fallen Photonenbahn und Stromlinie, und damit auch die entsprechenden Gradienten, zusammen. Bei Scheibenwinden ist das mit Sicherheit nicht mehr der Fall. Zwar wurde in einfachen Modellen durch die Beschränkung auf einen vertikalen Wind und vertikal strömender Photonen dieser Gradient mit dem Gradienten entlang der z-Achse identifiziert [Vitello und Shlosman 1988]. Wir wissen aber schon, daß sogar im Nahbereich der Photosphäre die Biegung des Windes eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielt.

Wir müssen deshalb die verallgemeinerte Sobolev-Theorie für beliebige Strömungen verwenden, wie sie [Rybicki und Hummer 1978] entwickelt haben. Demnach ist der Gradient entlang einer Photonbahn dv_l/dl gegeben durch

$$\frac{dv_l}{dl} = \sum_i^3 \sum_j^3 n_i n_j e_{ij} \,, \tag{5.40}$$

[1]Eigentlich ist durch die Rotation des Sternes auch dort nur eine Axialsymmetrie gegeben, was meistens aber unberücksichtigt bleibt.

wobei die n_i Komponenten des Einheitsvektors sind. In Kugelkoordinaten bzw. in Zylinderkoordinaten lautet dieser

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Der Tensor e_{ij} ist der "rate-of-strain" Tensor oder Spannungstensor, der hier in Zylinderkoordinaten angegeben ist [Batchelor 1967, S. 602],

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{rr} & e_{r\phi} & e_{rz} \\ e_{\phi r} & e_{\phi\phi} & e_{\phi z} \\ e_{zr} & e_{z\phi} & e_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \tag{5.42}$$

mit den Komponenten

$$e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{5.43}$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \tag{5.44}$$

$$e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{5.45}$$

$$e_{r\phi} = e_{\phi r} = \frac{1}{2r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\phi}{r} \tag{5.46}$$

$$e_{\phi z} = e_{z\phi} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{2r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} \tag{5.47}$$

$$e_{zr} = e_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial r} \tag{5.48}$$

$$\Rightarrow e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\phi}{r} & \frac{1}{2}\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{2r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\phi}{r} & \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} & \frac{1}{2}\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{2r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{2}\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{2r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{ij} \tag{5.49}$$

Nun können wir die einzelnen Komponenten (5.41, 5.49) einsetzen und die Summe (5.40) ausführen. Wir benutzen dabei direkt die ϕ-Symmetrie, so daß $\partial/\partial\phi = 0$ ist. Zu beachten ist, daß ϑ und φ Winkel in Wolkenkoordinaten im mitbewegten Koordinatensystem sind, unter denen ein Strahl das Medium kreuzt (vgl. (§3.1.1, S.31)), und i ist weiterhin der Winkel zwischen der poloidalen Komponente der Geschwindigkeit v_s und der z-Achse ($\cos i = v_z/v_s$).

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{dv_l}{dl} \quad = \quad & \cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta\frac{\partial v_r}{\partial z} + \cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta\frac{\partial v_z}{\partial r} \\ & + \cos\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \cos\varphi\sin\varphi\sin\vartheta^2\frac{\partial v_\phi}{\partial r} \\ & + \cos\vartheta^2\frac{\partial v_z}{\partial z} + (\cos\varphi\sin\vartheta)^2\frac{\partial v_r}{\partial r} \\ & - \frac{v_\phi\cos\varphi\sin\varphi\sin\vartheta^2}{r} + \frac{v_r(\sin\varphi\sin\vartheta)^2}{r} \end{aligned} \tag{5.50}$$

Der Gradient (5.50) ist in der obigen Form für die spätere Anwendung der Flußröhrennäherung nicht geeignet. Bei dieser Näherung wird ja gerade nur die Veränderung physikalischer Parameter entlang einer isolierten Bahn betrachtet. Nun tauchen aber in 5.50 Gradienten entlang der $z-$ und der r-Achse auf, die bei einem beliebigen Röhrenverlauf im Allgemeinen nicht angebbar sind, wenn man nur den Geschwindigkeitsverlauf entlang der Röhre kennt. Wir werden deshalb wieder die Transformation auf Stromlinienkoordinaten vornehmen (4.26-4.29) und zusammenfassen.

$$\begin{aligned}
\frac{dv_l}{dl} &= \cos\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \cos\varphi\sin\varphi(\sin\vartheta)^2\frac{\partial v_\phi}{\partial r} \\
&+ \left(\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta - \cos i\sin i\cos\vartheta^2 - 2\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta\sin i^2 + \cos i\sin i(\cos\varphi\sin\vartheta)^2\right)\frac{\partial v_s}{\partial n} \\
&+ \left(\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta - \cos i\sin i\cos\vartheta^2 - 2\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta\sin i^2 + \cos i\sin i(\cos\varphi\sin\vartheta)^2\right) v_s\frac{\partial i}{\partial s} \\
&+ \left(-2\cos i\cos\varphi\cos\vartheta\sin i\sin\vartheta + (\cos\vartheta\sin i)^2 + (\cos\varphi\sin\vartheta)^2 - (\cos\varphi\sin i\sin\vartheta)^2\right) v_s\frac{\partial i}{\partial n} \\
&+ \left(2\cos i\cos\varphi\cos\vartheta\sin i\sin\vartheta + \cos\vartheta^2 - (\cos\vartheta\sin i)^2 + (\cos\varphi\sin i\sin\vartheta)^2\right)\frac{\partial v_s}{\partial s} \\
&- \frac{v_\phi\cos\varphi\sin\varphi\sin\vartheta^2}{r} + \frac{v_s\sin i(\sin\varphi\sin\vartheta)^2}{r}
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Dieser Ausdruck sieht nicht nur sehr unhandlich aus, er ist es auch. Um seine Richtigkeit zu überprüfen, kann man sich Spezialfälle anschauen, die in der Literatur schon behandelt sind. Der wichtigste Fall ist der eines Sternwindes, der radial von der Oberfläche weggeht; man erhält ihn, indem man die Winkelgeschwindigkeit wegläßt ($v_\phi = 0$) und eine geradlinige Stromlinie parallel zur r-Achse vorgibt ($i = \pi/2$). Dadurch reduziert sich der Ausdruck (5.51) auf genau den Ausdruck, der bei Sternwindmodellen benutzt wird, wenn der endliche Öffnungswinkel des Sternes berücksichtigt wird (siehe 5.10). Allerdings muß man berücksichtigen, daß (5.52) in dreidimensionalen Zylinderkoordinaten gegeben ist, die sich erst auf zweidimensionale Polarkoordinaten reduzieren, wenn $\vartheta = \pi/2$ ist. Erst in diesem Fall laufen dann alle Strahlen parallel zur Scheibe.

$$\frac{dv_l}{dl} = \left(\cos\varphi^2\frac{\partial v_s}{\partial s} + \sin\varphi^2\frac{v_s}{r}\right)\sin\vartheta^2 \tag{5.52}$$

Eine etwas andere Gleichung findet man für den Fall, daß die nichtrotierende ($v_\phi = 0$) Stromlinie parallel zur z-Achse verläuft ($i = 0$). Da die z-Koordinate sich in Zylinderkoordinaten im Prinzip wie eine kartesische Koordinate verhält, ist hier der allgemeine Geschwindigkeitsgradient in seiner einfachsten Form gegeben.

$$\frac{dv_l}{dl} = \cos\vartheta^2\frac{\partial v_s}{\partial s} \tag{5.53}$$

Der Unterschied der Gleichungen (5.52) und (5.53) erinnert einen noch einmal deutlich daran, sich vor übereilten Schnellschlüssen in acht zu nehmen. Denn auf den ersten Blick könnte man annehmen es sei völlig unerheblich, ob man sich entlang der z- oder der r-Achse bewegt und denken die Gradienten sähen ebenfalls gleich aus. Das dem aber nicht so ist, hängt wieder mit der Krümmung zusammen. Bewegt sich z.B. im spährischen Fall (5.52) die Strömung mit konstanter Geschwindigkeit, dann ist der Gradient $\partial v_s/\partial s$ zwar Null, aber der Winkel, unter dem ein kreuzender Strahl diese Geschwindigkeit sieht, ändert sich im weiteren Verlauf, da die Ebenen konstanter Geschwindigkeit Kugelschalen sind, die mit größerem Radius immer "flacher" werden. Dies ist genau der Unterschied zur Annahme einer planparallelen Atmosphäre, die in (5.53) durch Vorgabe $i = 0$ implizit enthalten ist.

5.2.3 Anwendung der HFA

Jetzt müssen wir diesen Gradienten noch unserer Windtheorie anpassen und ein wenig vereinfachen. Am einfachsten sind dabei die Gradienten der Rotationsgeschwindigkeit v_ϕ zu behandeln.

Da wir Drehimpulserhaltung gefordert haben, ist der Wert von v_ϕ an jedem Punkt im Raum festgelegt. Es gilt dann nämlich $rv_\phi = a = const.$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_\phi}{\partial r} = -\frac{a}{r^2} \tag{5.54}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_\phi}{\partial z} = 0 \tag{5.55}$$

Für die transversalen Gradienten $\partial/\partial n$ können wir wieder die Transformation auf gemischte Koordinaten (r, s) machen. Zusätzlich machen wir noch die Näherung (4.106) und lassen den Skalenparameter heraus, also $\partial/\partial r = 0$. Dies liefert

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} = -\frac{\partial v_s}{\partial s}\tan i \tag{5.56}$$

$$\frac{\partial i}{\partial n} = -\tan i \frac{\partial i}{\partial s} \tag{5.57}$$

und wir erhalten einen etwas überschaubareren Gradienten

$$\begin{aligned} \frac{dv_l}{dl} &= \frac{\sin\varphi\sin\vartheta^2}{r}(v_s \sin i \sin\varphi - 2v_\phi\cos\varphi) \\ &\quad - v_s i' \cos\vartheta\,(\cos\vartheta\tan i - \cos\varphi\sin\vartheta) \\ &\quad + v_s' \cos\vartheta\,(\cos\vartheta + \cos\varphi\tan i\sin\vartheta). \end{aligned} \tag{5.58}$$

Bei senkrechten Photonenbahnen $\vartheta = 0°$ reduziert sich das Ganze noch weiter zu

$$\frac{dv_l}{dl} = v_s' - i' v_s \tan i \tag{5.59}$$

5.3 Liniengetriebene Scheibenwinde in der HFA

Nach all diesen Vorarbeiten können wir uns nun daran machen, die Beschleunigung durch Linien in unsere Windgleichungen einzubauen. Dabei werden wir die beiden Absorptionsquerschnitte von Thomsonstreuung und Linien zusammenfassen. Dies ist sehr einfach, da der Multiplikator $M(t)$ so definiert ist, daß er den Liniendruck im Verhältnis zum Thomsondruck angibt. Daraus folgt dann einfach

$$\vec{g}_{rad} = \frac{\kappa^{Th}\,\sigma}{c\,\pi}\int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}}\int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} (1 + M(t(\vartheta,\varphi)))\,T_{\mathit{eff}}^4(\vartheta,\varphi) \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\vartheta \\ \sin\varphi\,\sin\vartheta \\ \cos\vartheta. \end{pmatrix} \sin\vartheta\,d\varphi\;d\vartheta \tag{5.60}$$

Der Multiplikator ist weiterhin durch ein empirisch bestimmtes Potenzgesetz der Form (5.25) und die optische Tiefenvariable t analog zu (5.13) durch

$$t = \frac{n\sigma_{Th}v_{th}}{\left|\frac{dv_l}{dl}\right|} \tag{5.61}$$

gegeben. Den Gradienten entlang der Photonenbahnen hatten wir im vorangegangenen Abschnitt bestimmt (5.58). Dadurch kommt eine wichtige Neuerung in unsere Windgleichungen. Bei reiner Thomsonstreuung war der Strahlungsdruck nur abhängig vom Ort, jetzt hängt er über t und dv/dl von den beiden Gradienten v_s' und i_s' ab, sowie von der Geschwindigkeit selber, d.h. $\vec{g}_{rad} = \vec{g}_{rad}(r, z, i, v_s, i', v_s')$. Erschwerend kommt hinzu, daß durch die Integration ein analytischer Ausdruck für $\vec{g}_{rad}$ nicht angegeben werden kann.

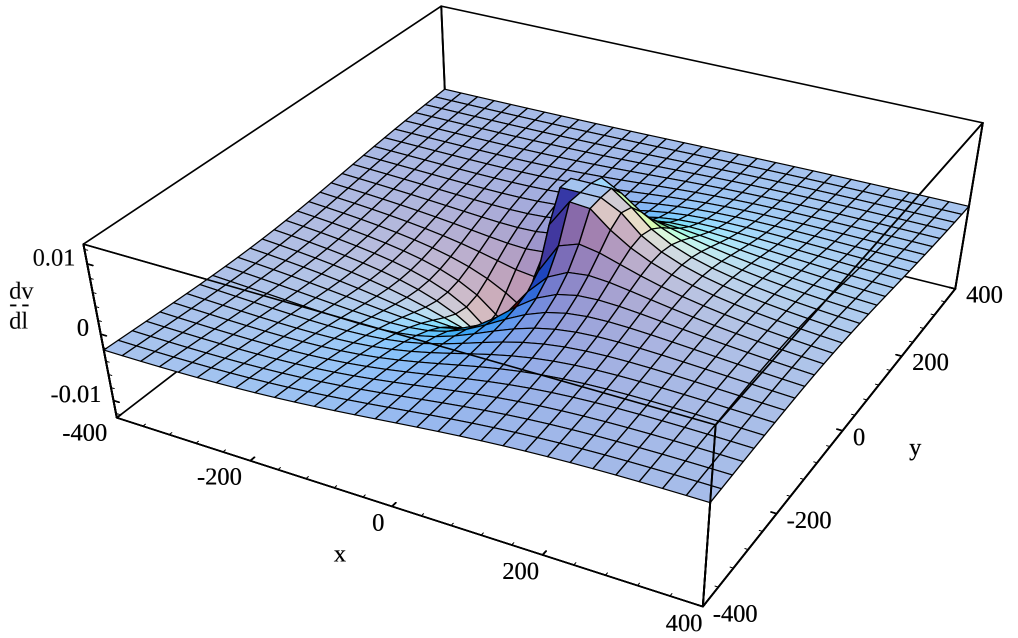

Abbildung 5.1: Geschwindigkeitsgradient von der Scheibe aus gesehen. Aufgetragen ist die Scheibe, die Höhe gibt den Gradienten (5.58) an, den ein am Ort (x, y) emittiertes Photon, das eine Strömung am Punkt $(r = 100, z = 1)$ über der Scheibe kreuzt, in der Strömung sieht. Für die Strömung wurde $i = 30°, v_s' = 1, v_s i' = 0.5, v_\phi = 0.1$ und $v_s = 10^{-3}$ angenommen. Es ist zu bedenken, daß für die Berechnung der Strahlungskraft noch die Struktur der Scheibe dieses Bild moduliert.

Setzen wir diesen Ausdruck jetzt in die Windgleichungen mit transversalem Druckgradienten (4.112, 4.113) ein, dann ergibt sich plötzlich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s &= \frac{v_s'}{v_s}\left({v_s}^2 - \frac{{c_s}^2}{\cos i^2}\right) - \tan i \frac{c_s^2}{v_s^2}\left(\frac{c_s^2\xi}{r\cos i} + \tan i\, c_s^2 \tilde{a}_s - \tilde{g}_n(s,i,v_s,i',v_s')\right) \\ &\quad + \tilde{g}_s(s,i,v_s,i',v_s')\left(1 - \tan i^2 \frac{c_s^2}{v_s^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n &= i'\left({v_s}^2 - \frac{{c_s}^2}{\cos i^2}\right) - \left(1 - \frac{c_s^2}{v_s^2}\right)\left(\tilde{g}_n(s,i,v_s,i',v_s') - \frac{c_s^2\xi}{r\cos i} - \tan i\, c_s^2 \tilde{a}_s\right) \\ &\quad + \tan i \tilde{g}_s(s,i,v_s,i',v_s')\frac{c_s^2}{v_s^2} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.63}$$

$$[1018]\ \ Fcs = -\frac{c_s^2\tilde{a}_s}{v_s} + v_s'\left(1 - \frac{c_s^2}{v_s^2 \cos i^2}\right) + \frac{c_s^2 gnx \tan i}{v_s^3} + \frac{gsx\left(-1 + \frac{c_s^2 \tan i^2}{v_s^2}\right)}{v_s} = 0 \tag{5.64}$$

$$[1019]\ \ Fcn = \frac{gnx\left(-1 + \frac{c_s^2}{v_s^2}\right)}{v_s} + i' v_s\left(1 - \frac{c_s^2}{v_s^2 \cos i^2}\right) + \frac{c_s^2 gsx \tan i}{v_s^3} + \frac{c_s^2 \tilde{a}_s \tan i}{v_s} = 0 \tag{5.65}$$

Diese beiden Gleichungen (5.62, 5.63) bilden zusammen ein System impliziter Gleichungen für v' und i'. Das heißt bei Vorgabe bestimmter Werte für (r, z, i, w) läßt sich durch Iteration von (v', i') eine Lösung für $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_n = 0$ finden.

Der kritische Punkt in der zweidimensionalen CAK-Theorie

Eine wichtige Auswirkung dieser neuen Formulierung ist, daß der kritische Punkt, wie wir ihn bisher kennengelernt hatten, nicht mehr von großer Relevanz ist. Denn bei $v_s = c_s/\cos i$ verschwindet zwar jeweils der erste Term, aber dadurch ist nicht ausgeschlossen, daß es eine Kombination von (i', v_s') gibt, bei der sich beide Strahlungskräfte, mit den entsprechenden Zusatztermen, gegenseitig wegheben, so daß die Gleichung lösbar ist.

Trotzdem gibt es einen kritischen Punkt, er ist nur anders definiert. In der einfachen eindimensionalen CAK-Theorie fanden die Autoren durch analytische Überlegungen heraus, daß es – ähnlich zum Parker-Wind – mehrere Bereich gibt. Wollte man einen Übergang von einem Bereich niedriger Geschwindigkeit zu einem Bereich hoher Geschwindigkeit, mußte die Lösung durch einen Punkt gehen, der dadurch definiert war, daß die partielle Ableitung der, analog zu (5.62) definierten, Windgleichung nach dem Geschwindigkeitsgradienten gleich Null sein mußte. Diese *Singularitätsbedingung* definierte einen neuen kritischen Punkt, der bei einer Geschwindigkeit oberhalb des sonischen Punktes lag.

In einer Untersuchung über die physikalische Interpretation strahlungsgetriebener Winde stellte [Abbot 1980] fest, daß die Geschwindigkeit an diesem kritischen Punkt genau der Geschwindigkeit enstpricht, mit der sich strahlungs-akustische Wellen ausbreiten. Wie beim Parker-Wind liegt also der kritische Punkt genau an der Stelle, ab der Störungen stromaufwärts den Bereich stromabwärts nicht mehr beeinflussen können. Durch die Kopplung von externer Beschleunigung und Geschwindigkeitsgradient ergibt sich eine Signalgeschwindigkeit, die größer ist als die Schallgeschwindigkeit. Ein ähnlicher Effekt ergab sich ja schon bei der Betrachtung zweidimensionaler Thomsonwinde über der Scheibe. Der Faktor $\cos i$ in der kritischen Geschwindigkeit kommt daher, daß Störungen in einer zweidimensionalen Strömungen quer zur Stromlinie eine Abkürzung nehmen können und somit schneller laufen, als Störungen, die sich mit Schallgeschwindigkeit entlang einer Stromlinie ausbreiten.

Der mathematische Hintergrund dafür, daß der kritische Punkt genau an der von CAK gefundenen Stelle liegt, ist der, daß an dieser Stelle die implizite Gleichung nicht mehr auflösbar ist. Die Singularitätsbedingung definiert die Charakterisitiken, an denen Differentialgleichungen unterschiedlichen Typs ineinander übergehen [Courant und Hilbert 1968, Kap. 5]. Sie bestimmen den "Kausalitätskegel" der partiellen Differentialgleichung. Physikalisch trennt dieser Bereiche, ab denen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der schnellsten Störungen langsamer ist, als die Strömung selber, so daß der eine Bereich nicht weiß, was der andere tut.

Wenn wir diesen Gedanken verallgemeinern, dann liegt der kritische Punkt auch in mehrdimensionalen Strömungen dort, wo das System impliziter Gleichungen keine lokal eindeutige Lösung mehr liefert. Nach dem allgemeinen Auflösungssatz impliziter Gleichungssyteme ist das genau dort der Fall, wo die Jacobi Determinante des Systems singulär wird [Bronstein und Semendjaev 1985, Kap. 3.1.6.4.]. In unserem Fall bedeutet das

$$\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial v_s'}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial i'} - \frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial i'}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial v_s'} = 0, \tag{5.66}$$

wobei festzuhalten ist, daß in Analogie zu den Sternwinden $\partial\mathcal{F}_s/\partial v_s' = 0$ und $\partial\mathcal{F}_n/\partial i' = 0$ eine Untermenge der Lösungen ist. (5.66) ist unsere Singularitätsbedingung für den kritischen Punkt. An dieser Stelle reichen die beiden Windgleichungen nicht aus, um eine eindeutige Lösung zu geben. Es muß also weitere Gleichungen geben, die an dieser Stelle eine Lösung festlegen.

Bei der CAK-Theorie dient die Regularitätsbedingung daher dazu, am kritischen Punkt diejenige Lösung festzulegen, die einen kontinuierlichen Übergang von einem Bereich in den anderen garantiert. Wir erhalten diese durch die Forderung, daß die totale Ableitungen von $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_n = 0$ entlang der Stromlinie ebenfalls immer Null sein muß.

$$\frac{d\mathcal{F}_n}{ds} = 0 = \frac{di'}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial i'} + \frac{dv_s'}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial v_s'} + \frac{di}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial i} + \frac{dv_s}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial v_s} + \frac{dr}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial r} + \frac{dz}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial z} \tag{5.67}$$

$$\frac{d\mathcal{F}_s}{ds} = 0 = \frac{di'}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial i'} + \frac{dv_s'}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial v_s'} + \frac{di}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial i} + \frac{dv_s}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial v_s} + \frac{dr}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial r} + \frac{dz}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial z} \tag{5.68}$$

Eigentlich ist diese Forderung trivial und bietet keine neuen Informationen, da mit den zwei neuen Gleichungen auch zwei neue Variablen auftreten, nämlich i'' und v_s''. Am kritischen Punkt aber kommt dieser Forderung eine besondere Bedeutung zu. Formen wir nämlich (5.67, 5.68) um und benutzen die Singularitätsbedingung (5.66), dann lassen sich in beiden Gleichungen die Terme mit i'' und v'' eliminieren. Wir erhalten somit zwei neue, wertvolle Gleichungen – die Regularitätsbedingungen am kritischen Punkt.

$$0 = \left(\frac{di}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial i} + \frac{dr}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial r} + \frac{dv_s}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial v_s} + \frac{dz}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial z}\right)\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial i'} - \frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial i'}\left(\frac{di}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial i} + \frac{dr}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial r} + \frac{dv_s}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial v_s} + \frac{dz}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial z}\right) \tag{5.69}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial v_s'}\left(\frac{di}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial i} + \frac{dr}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial r} + \frac{dv_s}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial v_s} + \frac{dz}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial z}\right) - \left(\frac{di}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial i} + \frac{dr}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial r} + \frac{dv_s}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial v_s} + \frac{dz}{ds}\frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial z}\right)\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial v_s'} \tag{5.70}$$

Mit den Windgleichungen (5.62, 5.63), den Regularitätsgleichungen (5.69, 5.70), sowie der Singularitätsgleichung (5.66) lassen sich die Werte für $(z, i, v_s, v_s di/ds, dv_s, ds)$ in Abhängigkeit vom Radius r am kritischen Punkt eindeutig bestimmen, es ergibt sich eine kritische Linie über der Scheibe, da jede Stromlinie ihren kritischen Punkt hat. Wenn man hinzunimmt, daß der Multiplikator auch noch explizit von der Dichte, implizit also von der Massenverlustrate, abhängt, erhalten wir sogar eine kritische Ebene, bzw, eine kritische Linie für jede Stromlinie. Es muß also noch weitere Bedingungen geben, die die Massenverlustrate explizit bestimmen. Bei Sternwinden geschieht dies duch Anpassung an eine vorgegebene Sternatmosphäre. Bei Scheiben ist die Theorie aber noch nicht so weit, entsprechende Angaben zu machen. Hier bietet sich noch ein weites Feld, wenn man die gesamte vertikale Struktur der Scheibe berechenen will. Denn bei der Herleitung der Scheibengleichungen wurden gerade in diesem Bereich stark vereinfachende Annahmen gemacht.

Die Frage nach den kritischen Punkten soll deshalb weiteren Arbeiten vorbehalten bleiben. Die Überlegungen in diesem Abschnitt sollen deshalb nur Anstoß und Motivation für weitere Untersuchungen sein. In erster Linie ist es wichtig festzustellen, daß sich das Konzept der kritischen Punkte auf den zweidimensionalen Fall der Scheibenwinde verallgemeinern läßt und auch gerade in der Formulierung in Stromlinienkoordinaten gut handhabbar ist.

5.4 Numerische Rechnungen

5.4.1 Das Programm

Wir wollen diese Arbeit nicht beschließen ohne nicht zumindest beispielhaft die Windgleichungen gelöst zu haben. Dazu habe ich das Fortran-Programm HFAWIND entwickelt, mit dessen Hilfe sich die in dieser Arbeit hergeleiteten Windgleichungen lösen lassen. Ein Teil der Routinen berechnet das Integral des Strahlungsdruckes für Thomsonstreuung und Linienabsorption über einer Akkretionscheibe, deren Eigenschaften durch die in Kapitel 2 hergeleiteten Scheibengleichungen mit den relativistischen Korrekturfaktoren gegeben sind. Da es sich um ein zweidimensionales Integral handelt, müssen die Routinen aus Zeitgründen besonders auf die Scheibensituation optimiert sein. Die numerischen Ergebnisse wurden mit der gefundenen analytischen Lösung für den Thomsondruck bei $\aleph = 2$ verifiziert. Der so zu berechnende Strahlungsterm wird dann benutzt, um die Windgleichungen mit einem GEAR-Verfahren zu lösen. Bei liniengetriebenen Winden werden bei jedem Zeitschritt die impliziten Gleichungen für $\mathcal{F}_s$ und $\mathcal{F}_n$ durch Iteration gelöst. Zur Berechnung der kritischen Punkte und der linearisierten Gleichungen stehen Routinen zur Verfügung, die die partiellen Ableitungen der Windgleichungen berechnen. In der vollen Ausbaustufe umfaßt das Programm vor Anwendung eines Preprocessors 4500 Zeilen und wird deshalb im Anschluß an diese Arbeit noch einmal gesondert dokumentiert werden.

5.4.2 Beispielrechnungen

Um die Lösungen der Windgleichungen besser zu verstehen, wurden beispielhaft Modellrechnungen durchgeführt.

Thomsonwind

Die analytisch gefundene Aussage, daß ein Thomson-Scheibewind in der hier diskutierten Konfiguration nicht möglich ist, wurde durch die numerischen Rechnungen insofern glänzend bestätigt, als daß sie alle fehlschlugen. Ein kritischer Punkt konnte nicht gefunden werden, außer in der widersprüchlichen Kombination von Biegung und konstanter Röhrenbreite ohne transversalen Gradienten (4.98). Die vollständigen Gleichungen (4.112, 4.113) zeigten, wie erwartet, keine Lösung. Auch ein Start jenseits des kritischen Punktes blieb ohne Erfolg, da durch die Biegung der kritische Punkt zunehmend zu höheren Geschwindigkeiten wandert und den Wind wieder einholt, ohne daß aber gleichzeitig auch der Zähler wieder verschwindet. Die Gleichungen haben keine Lösung mehr. Die einzige numerische Lösung ergab sich dadurch, unterhalb des kritischen Punktes zu starten. Die Strömung wurde sehr bald in die Waagerechte gelenkt, so daß i bis auf Bruchteile bei $90°$ lag. Dadurch ist natürlich die kritische Geschwindigkeit soweit heraufgesetzt, daß der Wind durchaus Entweichgeschwindigkeit erreichen kann, ohne durch den kritischen Punkt laufen zu müssen. Physikalisch scheint eine solche Lösung eines quasi unendlich dünnen, parallel zur Scheibe laufenden Windes nicht sehr sinnvoll zu sein. Dahinter wird man eher eine Auswirkung der im Rahmen der HFA gemachten Idealisierungen vermuten.

Linien-Winde

Würde man der Argumentation, von [Vitello und Shlosman 1988] folgen, dann dürfte es keine liniengetriebenen Scheibenwinde geben, zumindest nicht auf die hier vorgestellte Weise. Die Autoren kamen nämlich zu dem Schluß, daß ein Scheibenwind nur dann möglich ist, wenn sich die Ionisationsstruktur des Windes entlang der z-Achse ändert und den Multiplikator zusätzlich vergrößert. Dieser Schluß beruhte aber auf der falschen Annahme, daß der Wind sich nur entlang der z-Achse bewegen würde. Hinzu kommt, daß in dieser Arbeit der Multiplikator anhand von nur wenigen starken Linien statistisch ausgewertet wurde, obwohl eigentlich alle Linien wichtig wären. Das hat zur Folge, daß starke Änderung in wenigen Linien das gesamte Resultat deutlich verfälschen können. So konnte [Stevens 1991] zeigen, daß genau diese Vereinfachungen bei einer früheren Arbeit, die mit derselben Methode gearbeitet hatte [MacGregor und Vitello 1982], zu genau entgegengesetzten Ergebnissen führt, wenn man sie genauer nachrechnet.

Dennoch schien sich die Argumentation zunächst zu bestätigen, denn auch die Hinzunahme der Biegung, allerdings ohne den transversalen Gradienten, führte zunächst dazu, daß zwar ein Punkt gefunden werden konnte, der die Bedingungen für einen kritschen Punkt erfüllte, alle Rechnungen aber dann im weiteren Verlauf schon bei leicht höheren Geschwindigkeiten abbrachen, da die impliziten Windgleichungen keine Lösung mehr hatten.

Erst die Hinzunahme des transversalen Gradienten und die Benutzung der vollen Gleichung, wie in (5.62, 5.63), führte am Ende auf Lösungen, die einen Wind bis auf die Entweichgeschwindigkeit beschleunigten. Als Beispiel sei deshalb zum Schluß eine solche Modellrechnung präsentiert. Dabei wurde eine Akkretionsscheibe um eine Zentralmasse mit $m_9 = 0.1$ und einer Akkretionsrate von $\dot{m}_0 = 0.1 = 0.4\,\mathsf{M}_\odot/\mathsf{yr}$ benutzt. Der Wind wurde bei verschiedenen Radien von 40 bis 150 R_g, senkrecht mit doppelter Schallgeschwindigkeit und einer Dichte von $0.5\ 10^{11}\mathsf{cm}^{-3}$ gestartet. Die Ergebnisse sind auf den nächsten Seiten dargestellt. Um die explizite Abhängigkeit von der Startdichte zu zeigen, wurden auch ein paar Stromlinien, für eine zehnmal leuchtschwächere Scheibe ($\dot{m}_0 = 0.01$) gerechnet. Hier wurde die Dichte beim Start um 2 Größenordnungen verringert, so daß es zu einem Wind kam. Die Rechnungen wurden jeweils abgebrochen, wenn entweder die zehnfache Entweichgeschwindigkeit oder der äußere Rand der Scheibe erreicht wurde. Da der Wind nicht am kritischen Punkt startet, sind die Ergebnisse mit Vorsicht zu interpretieren. Es kommt hier nur auf die prinzipiellen Eigenschaften an.

Zu unserer Beruhigung bestätigen sich die Annahme der HFA, insbesondere die Selbstähnlichkeit der Stromlinien. Lediglich in den Randbereichen ändert sich die Form auffällig, bis hin zu großen Radien, wo der Wind nicht mehr schnell genug ist. Hier muß die Dichte beim Start herabgesetzt werden, so daß sich eine höhere Beschleunigung ergibt, wie das in Abb.5.9 für die leuchtschwächere Scheibe getan wurde. Allerdings kommt man irgendwann in Bereiche, wo eine andere Physik eine Rolle spielt. Entweder ist der Wind dann so dünn, daß er durch Comptonheizung hochgeheizt wird, und die Linien verschwinden, oder aber die Strahlungstemperatur der Scheibe und somit auch die Gastemperatur des Windes fällt unter $10^4\mathsf{K}$, wo ebenfalls keine effektive Linienbeschleunigung mehr möglich ist.

Bei den Ergebnissen fallen mehrere Dinge sofort auf. Da ist zum einen der Buckel am Ende der Kurven. Dieser kommt vom Übergang des Geometriefaktors in den sphärischen Bereich. Dort geht die Dichte in ein s^{-2} Potenzgesetz über, da aber die Beschleunigung durch Linien steigt, wenn die Dichte fällt, erfolgt an diesem Punkt nochmal eine kleine Nachbeschleunigung. Allerdings muß man an dieser Stelle vorsichtig sein und überprüfen, inwieweit bei den kleinen Beschleunigungen die Sobolev-Approximation noch gilt.

Betrachtet man die Geschwindigkeit, so ergibt sich das plausible Ergebnis, daß die Endgeschwindigkeit mit der Entweichgeschwindigkeit skaliert, wie es auch bei Sternen der Fall ist. Die Tatsache, daß bei einigen Kurven die Lichtgeschwindigkeit erreicht wird, darf nicht überraschen, da die Gleichungen alle nichtrelativistisch sind. Durch Wahl einer höheren Dichte beim Start kann das aber auch ohne Erweiterung verhindert werden. Hier wird dann die Untersuchung des kritischen Punktes wichtig. Es ist aber erfreulich, daß bei der erreichbaren Endgeschwindigkeit genügend Spielraum vorhanden ist.

Als letztes sei noch auf die 3-dimensionale Struktur des Windes verwiesen. Abb.5.3 erinnert noch einmal deutlich daran, daß auch der Wind eine differentiell rotierende Strömung ist. Inwieweit dadurch Störungen und Turbulenzen gerade in einem liniengetriebenen Wind, der per se schon instabil und turbulent ist, angeregt werden, ist noch nicht klar.

Auf jeden Fall scheint eine weiter Behandlung dieses Themas im Rahmen der hier vorgestellten Methode, durch ausführliche Rechnung konkreter Modelle mit Variation der Parameter, vielversprechend und interessant zu sein.

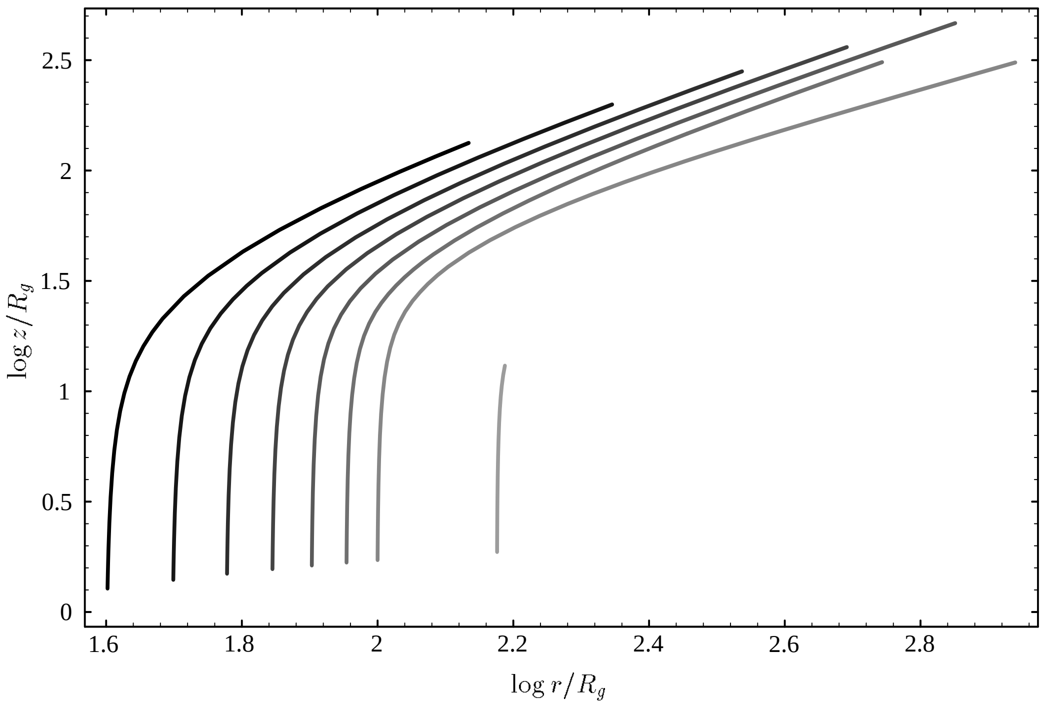

Abbildung 5.2: Stromlinien eines liniengetriebenen Windes über einer Akkretionsscheibe mit $m_9 = 0.1, \dot{m}_0 = 0.1$ gestartet mit zweifacher Schallgeschwindigkeit auf der Oberfläche der Scheibe und einer Dichte von $0.5\ 10^{11}\mathrm{cm}^{-3}$.

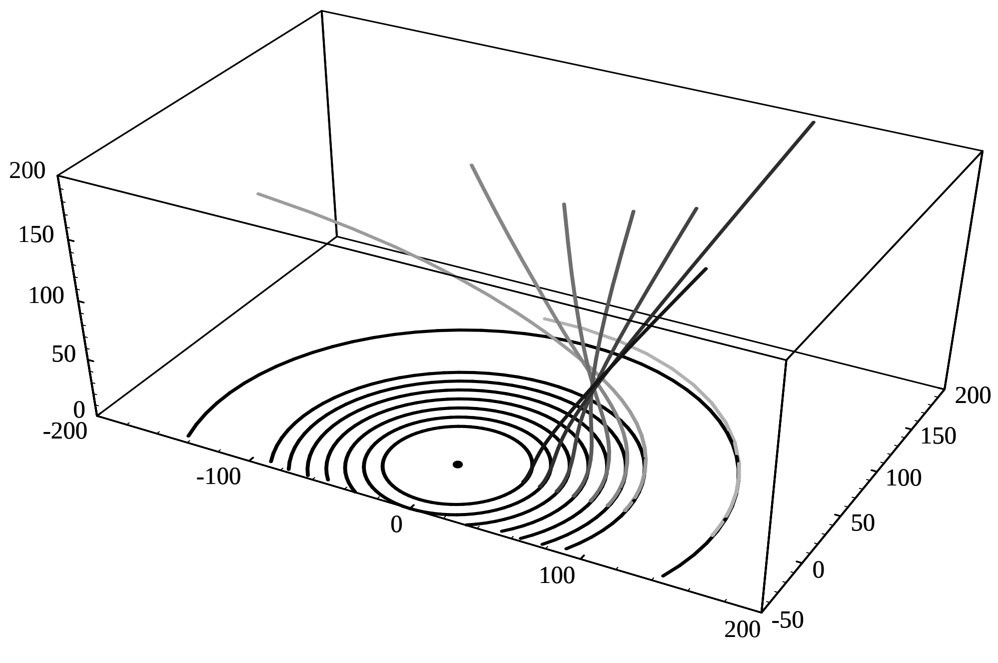

Abbildung 5.3: Die Stromlinien aus Abb.5.2 in 3-dimensionaler, linearer Darstellung. Die Einheiten der Achsen sind Längenangaben in Gravitationsradien. Die Kreise in der x/y-Ebene entsprechen Keplerorbits um das Zentrum.

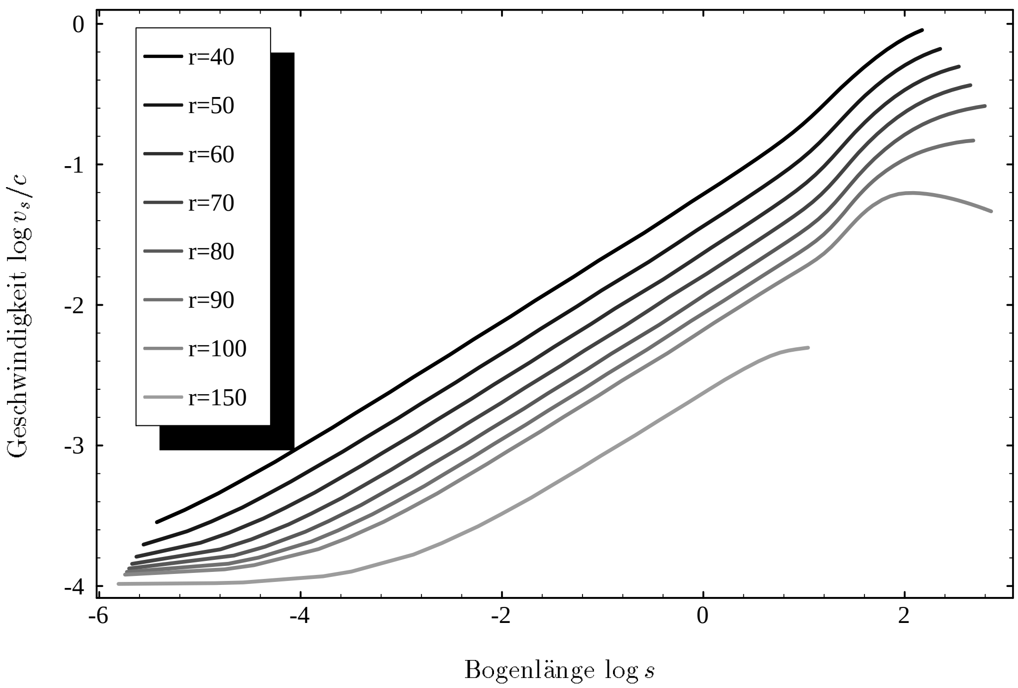

Abbildung 5.4: Geschwindigkeitsverlauf entlang der in Abb.5.2 dargestellten Stromlinien.

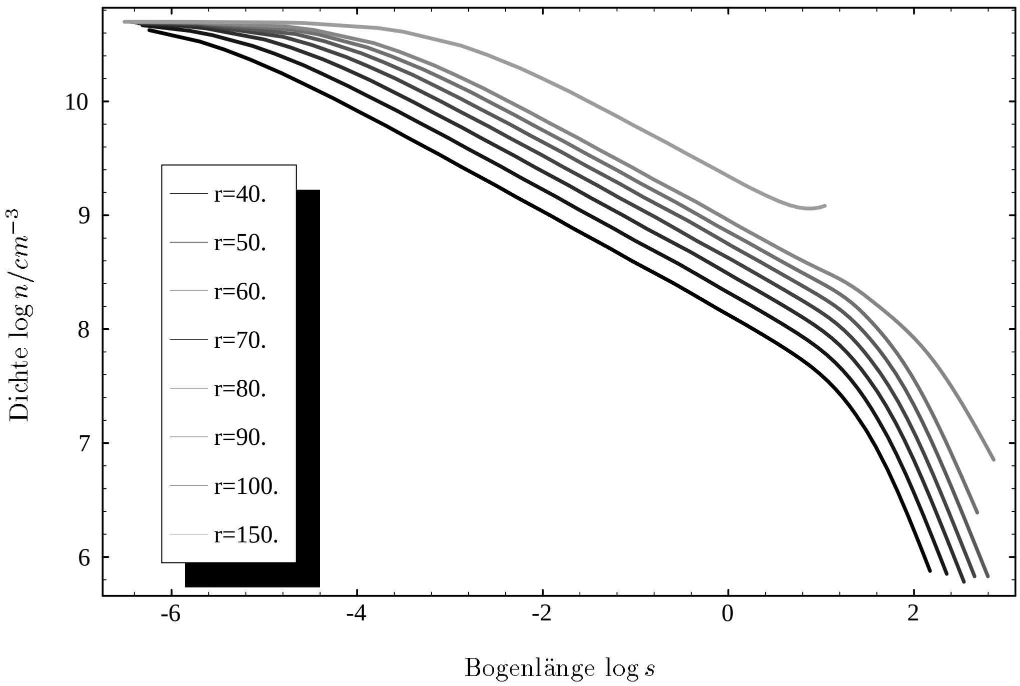

Abbildung 5.5: Dichteverlauf entlang der in Abb.5.2 dargestellten Stromlinien.

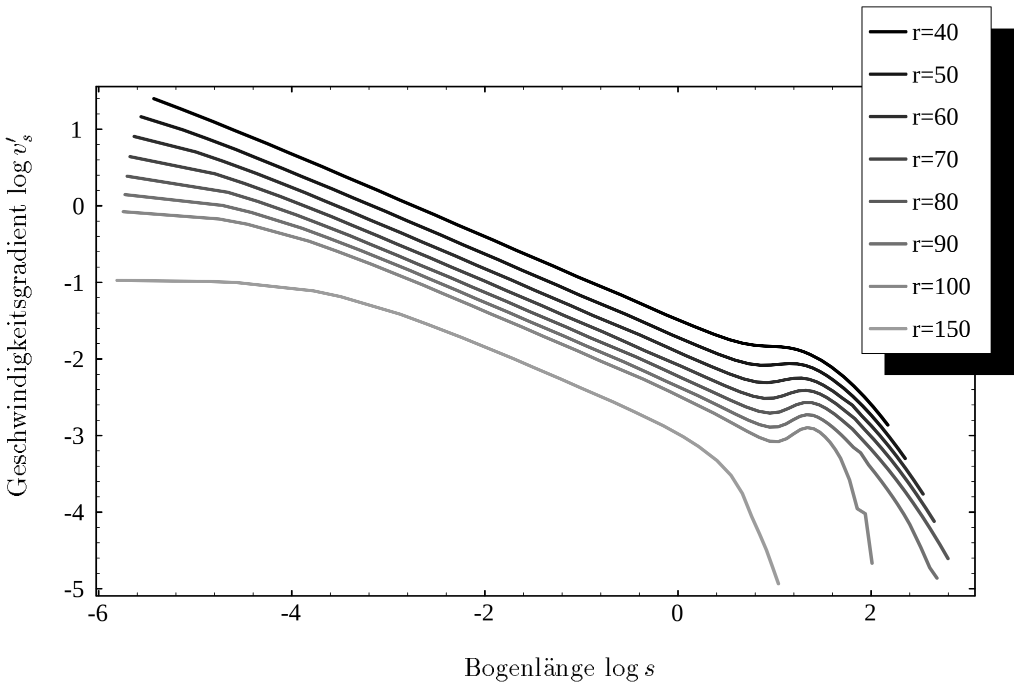

Abbildung 5.6: Verlauf des Geschwindigkeitsgradienten entlang der in Abb.5.2 dargestellten Stromlinien.

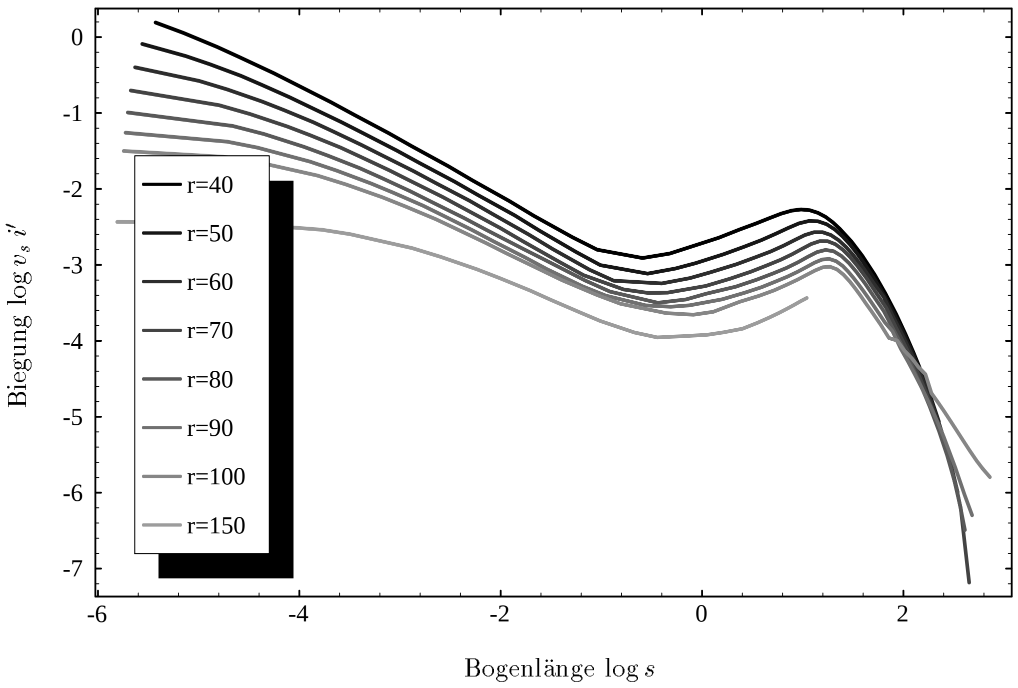

Abbildung 5.7: Verlauf der Biegung ($v_s\, i'$) entlang der in Abb.5.2 dargestellten Stromlinien.

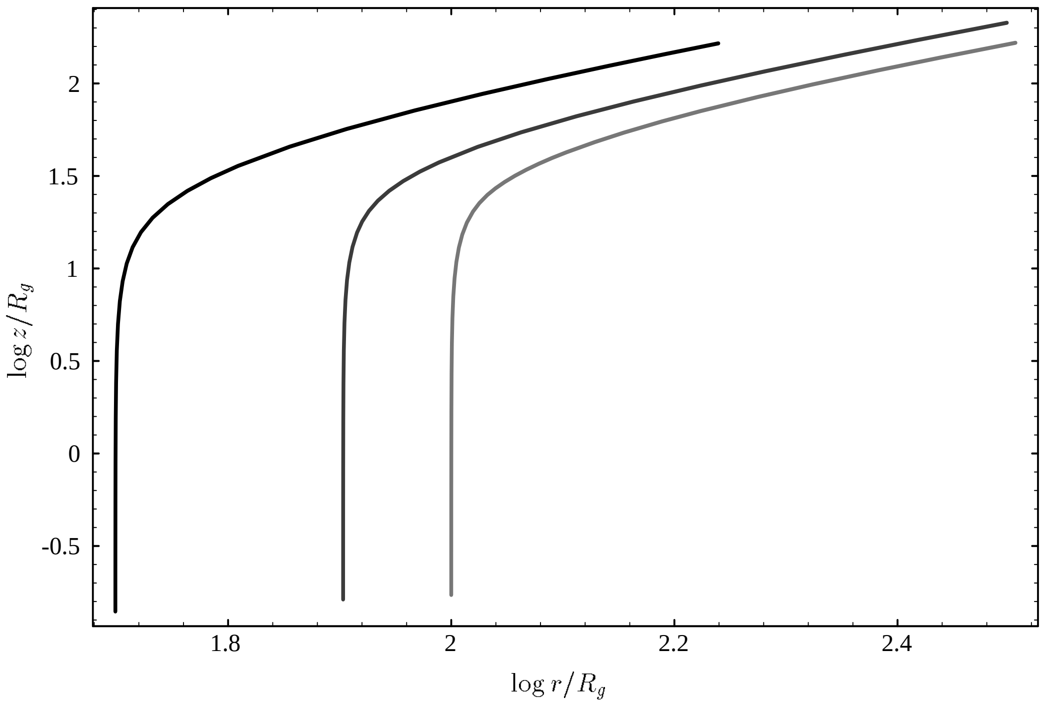

Abbildung 5.8: Stromlinien eines liniengetriebenen Windes über einer Akkretionsscheibe mit $m_9 = 0.1, \dot{m}_0 = 0.01$ gestartet mit zweifacher Schallgeschwindigkeit auf der Oberfläche der Scheibe und einer Dichte von $0.5\ 10^9 \mathrm{cm}^{-3}$.

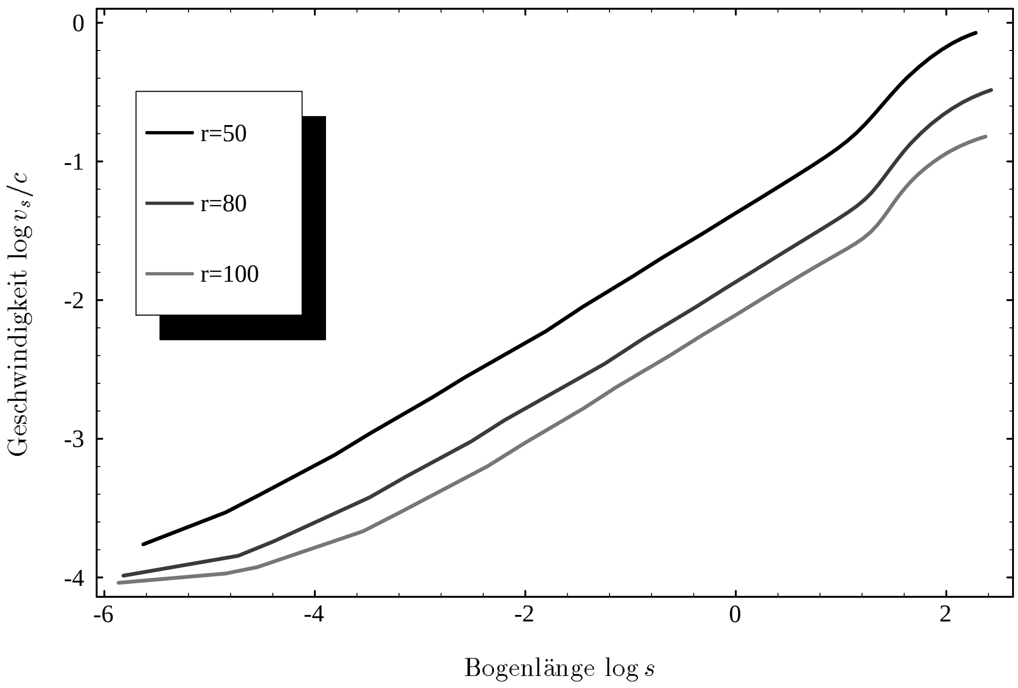

Abbildung 5.9: Geschwindigkeitsverlauf entlang der in Abb.5.8 dargestellten Stromlinien.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden die Grundgleichungen für Standard-Akkretionsscheiben noch einmal hergeleitet. Es zeigt sich, daß Akkretionsscheiben um schwarze Löcher mit 10^7 bis $10^9 \mathrm{M}_\odot$, wie sie in Aktiven Galaktischen Kernen vermutet werden, vergleichbar sind mit heißen OB-Sternen, die einen starken, wahrscheinlich liniengetriebenen, Wind zeigen.

Aufgund dieser Analogie wurde die Situation über einer Akkretionsscheibe untersucht und ein Verfahren entwickelt, mit dem sich Scheibenwinde auf eine physikalisch durchschaubare Weise beschreiben lassen. Aufgrund der postulierten Selbstähnlichkeit der Stromlinien entlang der Scheibe, läßt sich die Eulergleichung durch eine hydrodynamische Flußröhren Approximation (HFA) auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen reduzieren, die die Entwicklung des Windes entlang einer Stromlinie beschreiben. Dadurch können die aus der eindimensionalen Windtheorie bekannte Konzepte, z.B. für die Behandlung kritischer Punkte bzw. Charakteristiken, auf die Scheibensituation übertragen werden. Anhand konkreter Probleme wird daraufhin die konkrete Anwendbarkeit dieser Art der Formulierung demonstriert.

Die Untersuchung von stationären, isothermen, strahlungsgetriebenen Winden, die durch Thomson-Absorption beschleunigt werden, führt zu dem Ergebnis, daß ein solcher Wind, wegen der vertikal ansteigenden Gravitationskraft bei Scheiben, auf die herkömmliche Weise nicht möglich ist.

Im zweiten Schritt wurde die für Sterne entwickelte Theorie liniengetriebener Winde auf Scheibenwinde erweitert. Durch Beispielrechnungen konnte gezeigt werden, daß gerade der zweidimensionale Charakter dieser Theorie Lösungen der Windgleichungen erlaubt. Dadurch ist zwar die Existenz eines solchen Scheibenwindes noch nicht endgültig nachgewiesen, sie ist aber im Rahmen des Standardmodells der Akkretionsscheiben sehr wahrscheinlich.

In zukünftigen Arbeiten müssen jetzt konkrete Modellrechnungen folgen, die eine Untersuchung der kritschen Punkte liniengetriebener Scheibenwinde einschließen und Massenverlustraten bestimmen. Darüberhinaus bieten sich noch eine Menge weiterer Erweiterungen an. Wie ändert sich z.B. der Wind, wenn man ihn nicht mehr isotherm rechnet? Welchen Einfluß hat das eingestrahlte Photonenspektrum auf die Struktur des Windes und was bewirken Magnetfelder in diesem Zusammenhang?

Darüberhinaus stellt sich die Frage, welchen Einfluß der Wind auf die Struktur der Scheibe hat und welche Auswirkungen sich für die Umgebung der Scheibe insbesondere die BLR ergeben. Bestätigt sich das Akkretionsscheiben in Quasaren fast zwangsläufig einen Wind haben, wird dies nicht ohne Einfluß auf unser Verständnis der Vorgänge in Quasaren sein. Ziel sollte es sein diese Frage irgendwann durch Vergleich gerechneter Modellspektren mit der Beobachtung zu klären.

Literaturverzeichnis

[Abbot 1980] Abbot, D. C. (1980): "The theory of radiatively driven stellar winds. I. A physical interpretation" *Ap.J.*, **242**: 1183-1207

[Abbot 1982] Abbot, D. C. (1982): "The theory of radiatively driven stellar winds. II. The line acceleration" *Ap.J.*, **259**: 282-301

[Abramowiccz *et al* 1990] Abramowiccz, M. A., Livio, M., Soker, N., Szuszkiewicz, E. (1990): "Local stability of thick accretion disks. II. Viscous and radiative effects", submitted to Astron.Astrophys.

[Abramowitz und Stegun 1972] Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1972): "Handbook of mathematical functions", Dover Publications, New York

[Antonucci und Miller 1985] Antonucci, R. R. J., Miller, J. S. (1985)*Ap. J.*, **297**: 621

[Bardeen 1970] Bardeen, J. M. (1970)*Nature*, **226**: 64

[Bardeen 1973] Bardeen, J. M. (1973): "Timelike and null geodesics in the Kerr metric" in "Black holes", S.408-445, DeWitt, C. and DeWitt, B. (Ed.), Gordon & Breach, New York

[Bardeen *et al* 1972] Bardeen, J. M., Press, W. H., Teukolsky, S. A. (1972): "Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchroton radiation" *Ap.J.*,**178**: 347-369

[Batchelor 1967] Batchelor, G. K. (1967): "An introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press, Cambridge

[Beltrametti und Perry 1980] Beltrametti, M., Perry, J. J. (1980): "Radiatively driven winds from extended sources" *Astron.Astrophys.*, **82**: 99-109

[Bisnovatyi-Kogan und Blinnikov 1977] Bisnovatyi-Kogan, G. S., Blinnikov, S. I. (1977): "Disk accretion onto a black hole at subcritical luminosity" *Astron. Astrophys.*, **59**: 11-125

[Bland-Hawthorn *et al* 1991] Bland-Hawthorn, J., Wilson, A. S., Tully, R. B. (1991): "Ultramassive ($10^{11} M\odot$) dark core in the luminous infrared galaxy NGC 6240?", Preprint

[Blandford 1976] Blandford, R. D. (1976)*Mon. Not. R. astr. Soc.*, **176**: 465

[Blandford und Payne 1982] Blandford, R. D., Payne, D. G. (1982): "Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets" *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **199**: 883-903

[Blandford und Znajek 1977] Blandford, R. D., Znajek, R. L. (1977)*Mon. Not. R. astr. Soc.*, **179**: 433

[Bowers und Deeming 1984] Bowers, R., Deeming, T. (1984): "Astrophysics I. Stars", Jones and Bartlett Publishers, Boston

[Bronstein und Semendjaev 1985] Bronstein, I. N., Semendjaev, K. A. (1985): "Taschenbuch der Mathematik", Verlag Harry Deutsch, Frankfurt

[Camenzind 1990] Camenzind, M. (1990): "Magnetized disk-winds and the origin of bipolar outflows" in "Reviews in modern astronomy 3 - Accretion and winds", S.234-265, Klare, G. (Ed.), Springer, Berlin

[Castor *et al* 1975] Castor, J. I., Abbot, D. C., Klein, R. I. (1975): "Radiation-driven winds in Of stars" *Ap.J.*, **195**: 157-174

[Collin-Souffrin 1987] Collin-Souffrin, S. (1987): "Line and continuum radiation from the outer region of accretion discs in active galactic nuclei. I. Preliminary considerations" *Astron.Astrophys.*, **179**: 60-70

[Courant und Hilbert 1968] Courant, R., Hilbert, D. (1968): "Methoden der mathematischen Physik II", Springer–Verlag, Berlin

[Czerny und King 1989] Czerny, M., King, A. R. (1989): "Accretion disc winds and coronae" *M.N.R.A.S.*,**236**: 843-850

[Czerny und King 1989] Czerny, M., King, A. R. (1989): "Accretion disc winds and coronae - II. Illumination by the central source" *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **241**: 839-847

[Dokuchaev 1989] Dokuchaev, V. I. (1989): "The evolution of a massive black hole in the nucleus of a normal galaxy" *Sov.Astron.Lett.*, **15**(3): 167-170

[Dokuchaev 1990] Dokuchaev, V. I. (1990): "Simultaneous evolution of an active galaxy nucleus and a central massive black hole" *Sov.Astron.Lett.*, **16**(6): 416-420

[Duschl 1989] Duschl, W. J. (1989): "Accretion disk models with a self-consistent viscosity parameter α in convective zones" *Astron.Astrophys.*, **225**: 105-111

[Frank *et al* 1985] Frank, J., King, A. R., Raine, D. J. (1985): "Accretion power in astrophysics", Cambridge University Press

[Fukue 1989] Fukue, J. (1989): "Hydrodynamical winds from a geometrically thin disk" *Publ.Astron.Soc.Japan*,**41**: 123-132

[Fukue und Okada 1990] Fukue, J., Okada, R. (1990): "Hydrodynamical winds from an accretion disk" *Publ.Astron.Soc.Japan*, **42**: 249-267

[Gabler *et al* 1989] Gabler, R., Gabler, A., Kudritzki, R. P., Puls, J. a. P. A. (1989): "Unified NLTE model atmospheres including spherical extension and stellar winds: method and first results" *Astron.Astrophys.*, **226**: 162-182

[Genzel und Townes 1987] Genzel, R., Townes, C. H. (1987): "Physical conditions, dynamics, and mass distribution in the center of the Galaxy" *Ann.Rev.Astron.Astrophys.*,**25**: 377-423 (Review)

[Glatzel 1991] Glatzel, W. (1991): "Instabilities in astrophysical shear flows" in "Reviews in modern astronomy 4", S.104-116, Klare, G. (Ed.), Springer, Berlin

[Gradshteyn und Ryzhik 1980] Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M. (1980): "Table of Integrals, Series, and Products", Academic Press, New York

[Harwitt 1988] Harwitt, M. (1988): "Astrophysical Concepts. 2nd ed.", Springer Verlag, Berlin

[Heyvaerts 1990] Heyvaerts, J. (1990): "The role of magnetic fields in accretion disks", Proceedings of the Sixth IAP Astrophysics Meeting / IAU Coll. #129 in "Structure and emission properties of accretion disks", July 2-6 1990, S.109-118, Bertout, C. and Collin-Souffrin, S. and Lasota, J.P. and Tran Than Van, J. (Ed.), Editions Frontières

[Icke 1977] Icke, V. (1977): "Radiative acceleration of gas above a luminous disk" *Nature*, **266**: 699-701

[Icke 1980] Icke, V. (1980): "Gas flow above an alpha disk" *Astron.J.*, **85**: 329-374

[Icke 1989] Icke, V. (1989): "Photon surfing near compact accreting objects" *Astron. Astrophys.*, **216**: 294-304

[Icke und Eulderink 1986] Icke, V., Eulderink, F. (1986): "Radiative acceleration of clounds near compact accreting objects", Sukhumi, USSR in "Proceedings of the joint Varenna-Abastumani school & workshop on 'Plasma Astrophysics"', August 1986, S.351-356, ESA SP-251

[Kato 1983a] Kato, M. (1983a): "Neutron star winds" *Publ. Astron. Soc. Japan*, **35**: 33-34

[Kato 1983b] Kato, M. (1983b): "Optically thick winds and nova outbursts" *Publ. Astron. Soc. Japan*, **35**: 507-519

[Kazanas 1989] Kazanas, D. (1989): "On the Nature of Emission-Line Clouds of Quasars and Active Galactic Nuclei" *Ap.J.*,**347**: 74-86

[Kerr 1963] Kerr, R. (1963)*Phys.Rev.Lett.*, **11**: 237

[Kippenhahn 1977] Kippenhahn, R. (1977): "Condensations in expanding QSO Evelopes" *Astron. Astrophys.*, **55**: 125-133

[Kippenhahn *et al* 1975] Kippenhahn, R., Mestel, L., Perry, J. J. (1975): "Expanding quasar envelopes I. Steady radiation driven winds" *Astron. Astrophys.*, **44**: 123-138

[Kolmogorov 1942] Kolmogorov, A. N. (1942): *Izv. Akad. Nauk.*, **6**: 56

[Krause *et al* 1990] Krause, F., Meinel, R., Elstner, D., Rüdiger, G. (1990) in "IAU Symp. 140: Galactic and intergalactic magnetic fields", S.97, Beck, R. and Kronber, P.P. and Wielebinski, R. (Ed.), Reidel, Dordrecht

[Kudritzki 1988] Kudritzki, R. P. (1988): "The atmospheres of hot stars: modern theory and observation" in "Radiation in moving gaseous media. 18^{th} advanced course of the Swiss Society of Astronomy and Astrophysics", Kudritzki, R.P. and Yorke, H.W. and Frich, H. (Ed.), Geneva Observatory

[Lüst 1952] Lüst, R. (1952): "Die Entwicklung einer um einen Zentralkörper rotierenden Gasmasse I." *Z.f.Naturf.*, **7a**: 87-98

[Lang 1974] Lang, K. R. (1974): "Astrophysical Formulae", Springer Verlag, Berlin

[Laor und Netzer 1989] Laor, A., Netzer, H. (1989): "Massive thin accretion discs - I. Calculated spectra" *M.N.R.A.S.*, **238**: 897-916

[Liang und Price 1977] Liang, E. P. T., Price, R. H. (1977): *Ap.J.*, **218**: 247-252

[Lightman *et al* 1975] Lightman, A. P., Press, W. H., Price, R. H., Teukolsky, S. A. (1975): "Problem book in relativity and gravitation", Princeton University Press, Princeton / New Jersey

[Lovelace 1976] Lovelace, R. V. (1976):*Nature*, **262**: 649

[Lovelace *et al* 1991] Lovelace, R. V. E., Berk, H. L., Contopoulos (1991): "Magnetically driven jets and winds" *Ap.J.*, **379**: 696-705

[Lucy und Solomon 1970] Lucy, L. B., Solomon, P. M. (1970): "Mass loss by hot stars" *Ap. J.*, **159**: 879-893

[Lynden-Bell und Pringle 1974] Lynden-Bell, D., Pringle, J. E. (1974): "The Evolution of visous Discs and the Origin of the Nebular Variables" *Mon.Not.R.astr.Soc.*, **168**(3): 603-637

[MacGregor und Vitello 1982] MacGregor, K. B., Vitello, P. A. J. (1982): "Stellar winds in binary X-ray systems" *Ap.J.*, **259**: 267-281

[Malkan und Sargent 1982] Malkan, M. A., Sargent, W. L. (1982)*Ap. J.*, **254**: 22

[Marlborough und Roy 1970] Marlborough, J. M., Roy, J.-R. (1970): "Supersonic stellar winds in early-type stars" *Ap. J.*, **160**: 221-224

[Meier 1979a] Meier, D. L. (1979a): "The structure and appearance of winds from supercritical accretion disks. I. Numerical models" *Ap.J.*, **233**: 664-684

[Meier 1982b] Meier, D. L. (1982b): "The structure and appearance of winds from superctitical accretion disks. II. Dynamical theory of supercritical winds" *Ap. J.*, **256**: 681-692

[Meier 1982c] Meier, D. L. (1982c): "The structure and appearance of winds from superctitical accretion disks. III. Thermal and spectral properties of supercritical winds" *Ap. J.*, **256**: 693

[Mestel *et al* 1976] Mestel, L., Moore, D. W., Perry, J. J. (1976): "Expanding quasar envelopes II. Radiation-driven instabilities" *Astron. Astrophys.*, **52**: 203-212

[Michel 1984] Michel, F. C. (1984)*Ap. J.*, **279**: 807

[Mihalas 1978] Mihalas, D. (1978): "Stellar Atmospheres. 2nd ed.", W.H. Freeman and Co., San Francisco

[Mihalas und Mihalas 1984] Mihalas, D., Mihalas, B. W. (1984): "Foundations of radiation hydrodynamics", Oxford University Press, New York

[Mushotzky *et al* 1972] Mushotzky, R. F., Solomon, P. M., Strittmatter, P. A. (1972): "Radiation-pressure-driven mass loss from quasi-stellar Objects" *Ap. J.*, **174**: 7-15

[Netzer 1987] Netzer, H. (1987): "The physics and the structure of AGN" in "Astrophysical jets and their engines", S.103-124, Kundt, W. (Ed.), D. Reidel Publishing Company

[Novikov und Thorne 1973] Novikov, I. D., Thorne, K. S. (1973): "Astrophysics of black holes - 5. Black holes in binary star systems and in the nuclei of galaxies" in "Black holes", S.408-445, DeWitt, C. and DeWitt, B. (Ed.), Gordon & Breach, New York

[Okamoto und Kaburaki 1990] Okamoto, I., Kaburaki, O. (1990): "Thermodynamical and evolutional properties of Kerr black holes" *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **247**: 244-256

[Owocki 1990] Owocki, S. P. (1990): "Winds from hot stars" in "Reviews in modern astronomy 3 - Accretion and winds", S.98-123, Klare, G. (Ed.), Springer, Berlin

[Page und Thorne 1974] Page, D. N., Thorne, K. S. (1974): "Disk-accretion onto a black hole. I. Time-Averaged Structure of accretion disk" *Ap.J.*,**191**: 499-506

[Parker 1958] Parker, E. N. (1958): "Dynamics of the interplanetary gas and magnetic fields" *Ap. J.*, **128**: 664-676

[Parker 1971] Parker, E. N. (1971)*Ap. J.*, **163**: 255

[Pauldrach 1987] Pauldrach, A. (1987): "Radiation driven winds of hot lumnous stars. III. Detailed statistical equilibrium calculations for hydrogen to zinc" *Astron.Astrophys.*, **183**: 295-313

[Pauldrach und Puls 1990] Pauldrach, A. W. A., Puls, J. (1990): "Radiation driven winds of hot luminous stars. Applications of stationary wind models" in "Reviews in modern astronomy 3 - Accretion and winds", S.124-139, Klare, G. (Ed.), Springer, Berlin

[Pauldrach *et al* 1986] Pauldrach, A., Puls, J., Kudritzki, R. P. (1986): "Radiation-driven winds of hot luminous stars. Improvements of the theory and first results" *Astron.Astrophys.*, **164**: 86-100

[Pelletier und Pudritz 1990] Pelletier, G., Pudritz, R. E. (1990): "Magnetized accretion-ejection structure", Proceedings of the Sixth IAP Astrophysics Meeting / IAU Coll. #129 in "Structure and emission properties of accretion disks", July 2-6 1990, S.161-164, Bertout, C. and Collin-Souffrin, S. and Lasota, J.P. and Tran Than Van, J. (Ed.), Editions Frontières

[Pelletier und Pudritz 1991] Pelletier, G., Pudritz, R. E. (1991), submitted to *Ap. J.*

[Piran 1977] Piran, T. (1977): "Secondary winds and evaporation from acretion dics" *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **180**: 45-56

[Pudritz *et al* 1991] Pudritz, R. E., Pelletier, G., Gomez de Castro, A. I. (1991): "The physics of disk winds" in "The physics of star formation and early stellar evolution", S.539-564, Lada, C.J. and Kylafis, N.D. (Ed.), Kluwer Academic Publishers

[Puls 1987] Puls, J. (1987): "Radiation-driven winds of hot luminous stars. IV. The influence of multi-line effects" *Astron.Astrophys.*, **184**: 227-248

[Puls und Pauldrach 1990] Puls, J., Pauldrach, A. W. A. (1990): "Theory of radiatively driven winds of hot stars: II. Some aspects of radiative transfer" in "Reviews in modern astronomy 3 - Accretion and winds", S.140-155, Klare, G. (Ed.), Springer, Berlin

[Quinn und Paczyński 1985] Quinn, T., Paczyński, B. (1985): "Stellar winds driven by super-eddington luminosities" *Ap. J.*, **289**: 634-643

[Ruzmaikin *et al* 1988] Ruzmaikin, A. A., Shukurov, A. M., Sokoloff, D. D. (1988): "Magnetic fields of galaxies", Kluwer, Dodrecht

[Rybicki und Hummer 1978] Rybicki, G. B., Hummer, D. G. (1978): "A generalization of the Sobolev method for flows with nonlocal radiative coupling" *Ap.J.*, **219**: 654-675

[Rybicki und and Lightman 1979] Rybicki, G. B., and Lightman, A. P. (1979): "Radiative processes in astrophysics", John Wiley & Sons, New York

[Sanders *et al* 1989] Sanders, D. B., Phinney, E. S., Neugebuer, G., Soifer, B. T., Matthews, K. (1989): "Cotinuum Energy Distributions of Quasars: Shapes and Origins" *Ap. J.*,**347**: 29-51

[Sawada *et al* 1986] Sawada, K., Matsuda, T., Hachisu, I. (1986)*Mon. Not. R. astr. Soc.*, **219**: 75

[Schaaf und Schmutzler 1991] Schaaf, R., Schmutzler, T. (1991): "Stellar winds as broad line clouds", preprint in "Proceedings of the Heidelberg Conference on "Physics of active galactic nuclei"", June 1991

[Schmidt 1963] Schmidt, M. (1963)*Nature*, **197**: 1037

[Schmutzler 1987] Schmutzler, T. (1987): "Zum thermischen Zustand dünner Plasmen unter Einfluß beliebiger Photonenspektren", Dissertation, Bonn

[Shakura und Sunyaev 1973] Shakura, N. I., Sunyaev, R. A. (1973): "Black Holes in Binary Systems. Observational Appearance" *Astron.Astrophys.*,**24**: 337-355

[Shields 1978] Shields, G. (1978)*Nature*, **272**: 706

[Shlosman *et al* 1985] Shlosman, I., Vitello, P. A., Shaviv, G. (1985): "Active galactic nuclei: Internal dynamics and formation of emission clouds" *Ap.J.*, **294**: 96-105

[Sobolev 1960] Sobolev, V. (1960): “Moving envelopes of stars”, Harvard University Press (Russian edition, 1947), Cambridge, Mass.

[Spruit 1987] Spruit, H. C. (1987)*Astron. Astrophys.*, **184**: 173

[Spruit 1991] Spruit, H. C. (1991): “Shock waves in accretion disks” in “Reviews in modern astronomy”, S.197-207, Klare, G. (Ed.), Springer, Berlin

[Stevens 1991] Stevens, I. R. (1991): “X-ray-illuminated stellar winds: Optically thick wind models for massive X-ray binaries” *Ap.J.*, **379**: 310-326

[Tagger *et al* 1990] Tagger, M., Henriksen, R. N., Pellat, R. (1990): “Spiral instability of magnetized accretion disks”, Proceedings of the Sixth IAP Astrophysics Meeting / IAU Coll. #129 in “Structure and emission properties of accretion disks”, July 2-6 1990, S.119-127, Bertout, C. and Collin-Souffrin, S. and Lasota, J.P. and Tran Than Van, J. (Ed.), Editions Frontières

[Thorne 1974] Thorne, K. S. (1974): “Disk-accretion onto a black hole. II. Evolution of the hole” *Ap.J.*, **191**: 507

[Turolla *et al* 1986] Turolla, R., Nobili, L., Calvani, M. (1986): “On hydrodynamics of radiatively driven winds” *Ap.J.*, **305**: 573-581

[Vitello und Shlosman 1988] Vitello, P. A. J., Shlosman, I. (1988): “Line-driven winds from accretion disks. I. Effects of the ionization structure” *Ap.J.*, **327**: 680-692

[Weizsäcker 1948] Weizsäcker, C. F. (1948): “Die Rotation kosmischer Gasmassen” *Z.Naturf.*,**3 a**: 524-539

[Witzel und Quirrenbach 1990] Witzel, A., Quirrenbach, A. (1990): “Intraday variability and the compactness of extragalactic radio sources”, submitted to Proceedings of “Propagation effects in Space VLBI”

[Zahn 1990] Zahn, J.-P. (1990): “On the nature of disk viscosity”, Proceedings of the Sixth IAP Astrophysics Meeting / IAU Coll. #129 in “Structure and emission properties of accretion disks”, July 2-6 1990, S.87-97, Bertout, C. and Collin-Souffrin, S. and Lasota, J.P. and Tran Than Van, J. (Ed.), Editions Frontières

Danksagungen

Herzlich danken möchte ich Herrn Prof. Dr. Biermann, der mir das Thema für diese Arbeit überlassen und wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Seine Fragen und Anregungen haben die Probleme oft auf den Punkt gebracht und mir das Verständnis wesentlich erleichtert. Herrn Prof. Dr. Fahr danke ich dafür, daß er sich als Koreferent zu Verfügung gestellt hat.

Darüberhinaus habe ich sehr von den Diskussionen mit Herrn Dr. R. Schaaf profitiert. Auch meinen Kollegen Dr. W. Krülls, J. Rachen, M. Niemeyer, S. v. Linden, M. Diewald und Dr. K. Mannheim bin ich für die gute Zusammenarbeit dankbar. Meinem Freund Dirk Marcus danke ich für die Durchsicht der Arbeit.

Die Arbeit wurde durch das Max-Planck-Institut für Radioastronomie unterstüzt. Besonders gedankt sei dabei Herrn P. Müller und seinen Kollegen von der Rechnerabteilung für die aufmerksame Betreuung.

Großzügig unterstüzt worden bin ich auch von meinen Eltern, die mein Studium ermöglicht haben, sowie von meiner Schwiegermutter. Meine ganze Familie hat mir immer wieder den Rücken gestärkt. Ich bin ihr dafür sehr dankbar. Ganz besonders wichtig aber war mir während des Studium und der Abfassung der Arbeit die tatkräftige Unterstützung und Liebe meiner Frau.

Heino Falcke