**Werkcollege 2, Sterrenstelsels, 2008**

# 1 Evolutie van een bolhoop

Bolvormige sterhopen vormen een belangrijk ingredient voor het begrijpen van zowel ons eigen Melkwegstelsel (en andere sterrenstelsels) als van sterevolutie.

1. De zwaarste bolvormige sterhopen hebben een totale massa van ongeveer 1 miljoen zonsmassa's (voor 0.5 $M_\odot < M_* <$50 $M_\odot$. Er vanuitgaande dat de verdeling van massa's in dit massa-gebied een Salpeter functie volgt, hoeveel sterren bevinden er zich dan in deze bolhoop?

   *Gebruik makend van de salpeter functie is het aantal sterren dat zich vormt tussen een massa M en M+dM = $\xi$(M)dM. Het aantal sterren dat zich tussen twee limieten $M_1$ en $M_2$ vormt is dus gelijk aan:*

$$N = \int_{M_1}^{M_2} \xi(M)dM = \xi_0 \int_{M_1}^{M_2} M^{-2.35}dM = \frac{\xi_0}{-1.35}M^{-1.35}|_{M_1}^{M_2} = \frac{\xi_0}{1.35}(M_1^{-1.35} - M_2^{-1.35}) \quad (1)$$

   *en de totale massa die is gevormd:*

$$M_{\rm tot} = \int_{M_1}^{M_2} M\xi(M)dM = \xi_0 \int_{M_1}^{M_2} M^{-1.35}dM = \frac{\xi_0}{-0.35}M^{-0.35}|_{M_1}^{M_2} = \frac{\xi_o}{0.35}(M_1^{-0.35} - M_2^{-0.35}) \quad (2)$$

   *Het gaat er hier dus om, om $\xi_0$ te bepalen, gegeven dat $M_{\rm tot} = 10^6 M_\odot$. M.a.w:*

$$\xi_0 = \frac{0.35M_{\rm tot}}{M_1^{-0.35} - M_2^{-0.35}} = \frac{0.35\,10^6}{0.5^{-0.35} - 50^{-0.35}} = \frac{0.35\,10^6}{1.02} = 343\,052 \quad (3)$$

   *Het aantal sterren in de bolhoop wordt dus:*

$$N = \frac{\xi_0}{1.35}(M_1^{-1.35} - M_2^{-1.35}) = \frac{343\,052}{1.35}(0.5^{-1.35} - 50^{-1.35}) = 6.46\,10^5 \quad (4)$$

2. Aannemende dat al deze sterren zich op de hoofdreeks bevinden wat is dan de totale lichtkracht van deze bolhoop. Welke sterren domineren de lichtkracht van de bolhoop? Wat zal daarmee de kleur (= $B - V$) zijn van het gëintegreerde licht?

   *De lichtkracht van de bolhoop wordt gegeven door de Salpeter functie te vermenigvuldigen met de massa-lichtkracht relatie. Voor het gemak mag je deze nemen als:*

$$\frac{L(M)}{L_\odot} = (\frac{M}{M_\odot})^4 \quad (5)$$

   *oftewel, als we alles in zonseenheden doen:*

$$L(M) = M^4 \quad (6)$$

   *Je krijgt dan dus voor de vergelijking van het totale hoeveelheid licht:*

$$L_{\rm tot} = \int_{M_1}^{M_2} L(M)\xi(M)dM = \xi_0 \int_{M_1}^{M_2} M^4 M^{-2.35}dM = \frac{\xi_0}{2.65}(M_2^{2.65} - M_1^{2.65}) \sim 4 \cdot 10^9 L_\odot \quad (7)$$

   *In deze laatste vergelijking zie je dat de lichtkracht van de bolhoop volledig wordt gedomineerd door de zwaarste sterren. Deze bepalen dus ook de kleur van de bolhoop. In dit geval is dat dus de kleur van 50 $M_\odot$ hoofdreekssterren: combineer Table 1.1 en Table 1.3 uit het boek: $B - V = -0.23$*

3. De evolutie van de sterren in de bolhoop is natuurlijk bepalend voor de evolutie van de bolhoop zelf. Tijdens hun evolutie verliezen sterren een aanzienlijke hoeveelheid van hun massa en ook de lichtkracht verandert. We gaan er hier even voor het gemak vanuit dat de evolutie van een ster na de hoofdreeksfase instantaan is: het moment waarop de ster de hoofdreeks verlaat is ook het moment waarop het uiteindelijke overblijfsel van een onstaat. Ga er ook vanuit dat het sterverlies van sterren als volgt verloopt (en instantaan is):

$$M_{\rm zams} > 20 M_\odot \quad M_{\rm final} = 4 M_\odot \tag{8}$$
$$M_{\rm zams} > 8 M_\odot \quad M_{\rm final} = 1.4 M_\odot \tag{9}$$
$$M_{\rm zams} \le 8 M_\odot \quad M_{\rm final} = 0.6 M_\odot, \tag{10}$$
$$\tag{11}$$

waarbij de $M_{\rm final}$ karakteristiek zijn voor een stellair zwart gat, een neutronen ster en een witte dwerg.

Wat wordt nu de totale massa, de lichtkracht en de kleur (=$B-V$) van de sterrenhoop na 10 miljoen jaar en 1 miljard jaar. Gebruik hiervoor de relaties gegeven in Hoofdstuk 1 van het boek.

*Na 10 miljoen jaar zijn alle sterren met een massa van $> 20 M_\odot$ weg-geevolueerd. Het aantal sterren dat zich in dit interval bevindt is:*

$$N = \frac{\xi_0}{1.35}(M_1^{-1.35} - M_2^{-1.35}) = \frac{343\,052}{1.35}(20^{-1.35} - 50^{-1.35}) = 3160 \tag{12}$$

*De totale mass in deze range is:*

$$M_{\rm tot} = \int_{M_1}^{M_2} M\xi(M)dM = \xi_0 \int_{M_1}^{M_2} M^{-1.35} dM = \frac{\xi_0}{-0.35} M^{-0.35}|_{M_1}^{M_2} = \frac{\xi_o}{0.35}(20^{-0.35} - 50^{-0.35}) = 94\,243 M_\odot \tag{13}$$

*De gemiddelde massa is dus ∼30 M⊙! (Dit is een gemakkelijke check om te kijken of je antwoord een beetje klopt).*

*De totale massa die verloren is gegaan is dus deze totale massa - $N_{\rm massive} \cdot 4 M_\odot$ = 94243 - (3160×4) = 81 603 M⊙. De bolhoop heeft dus maar 8% van zijn massa verloren. Hierbij gaan we er vanuit dat de bolhoop al zijn zwarte gaten behoudt! Dit is in praktijk waarschijnlijk niet het geval omdat de zwarte gaten elkaar er uit kunnen gooien door dynamische interacties.*

*Aangezien de zwarte gaten totaal niet bijdragen aan de lichtkracht kun je de totale lichtkracht berekenen door in bovenstaande formule de bovengrens op 20 $M_\odot$ te stellen. Hiermee wordt $L = 3.6 \cdot 10^8 L_\odot$. De cluster heeft dus wel 90% van zijn licht verloren! De kleur is die van van 20 $M_\odot$ hoofdreekssterren: nog steeds ongeveer $B-V$=–0.32. Dit komt omdat deze sterren zoveel licht in het ultraviolet uitstralen dat de optische kleuren bijna niet veranderen.*

*Na 1 miljard jaar zijn alle sterren met massa $>$ 2 $M_\odot$ verdwenen. Dit waren er 98 duizend, waarvan 3160 zwaarder dan 20 M⊙, 10888 tussen de 8 en de 20 $M_\odot$, en dus 84 duizend tussen de 2 en de 8 Zonsmassa's. De totale massa die verloren is, is de 81 duizend van de sterren > 20 $M_\odot$, plus (130 000 - (10888×1.4)) ∼ 115 duizend $M_\odot$ voor alle sterren tussen de 8 en 20 Zonsmassa's die een neutronenster achterlaten, plus (296 000 -(84 000×0.6)∼245 duizend $M_\odot$) = een gezamelijke massa van 441 duizend $M_\odot$. De cluster is dus 40% van zijn massa kwijt geraakt. Tegelijkertijd is de lichtkracht van de cluster nog maar $L = 7.91 \cdot 10^5 L_\odot$. Dit is nog maar 2 $\cdot 10^{-4}$ van de oorspronkelijke lichtkracht! De kleur van de cluster is die van 2 $M_\odot$ sterren, wat een spectraaltype A2 is, en met $B-V \sim 0.1$. De cluster is dus wel duidelijk merkbaar roder geworden.*

## 2 Parallaxen en eigenbewegingen

Het meten van afstanden van sterren is een hachelijke zaak waarbij je altijd heel goed moet opletten. De meest directe manier van afstanden meten is door een astrometrische parallax (meestal kortweg 'parallax' genoemd). Op dit moment is HST het beste instrument om parallaxen te meten en dit kan tot ongeveer 1.5 mas (milliarcsecond) nauwkeurig.

1. Tot wat voor afstand kan HST dus parallaxen meten?

   *De maximale afstand is dus* $(1/1.5 \cdot 10^3$ *pc = 666 pc*

2. De fout op een parallax is heel belangrijk om goed te begrijpen en zeker als we over populaties van objecten praten. Stel dat HST een parallax gemeten heeft van 1.5±0.4 mas. Hoe vertaalt deze fout zich in een fout op de afstand? *De fout op de parallax vertaald zich in een asymmetrische fout op de afstand: d = 666*$243^{+140}_{-p}c$.

3. Stel nu dat we een aantal objecten meten die uniform door de ruimte verdeeld zijn (i.e. $n$=constant). Hoe neemt, per vierkante graad, het aantal sterren toe dat we zouden waarnemen?

   *Het volume van een pyramide is* $\frac{1}{3}dA$*, waarbij* $A$ *het oppervlak van het grondvlak is. Voor een constante openingshoek van bv. 1 vierkante graad, neemt A toe als* $d^2$*, en voor de toename van het aantal sterren krijgen we dat dit gaat met* $d^3$*. Niet geheel onverwacht natuurlijk!*

4. Stel nu dat we van deze sterren allemaal de parallax meten, en allemaal met een nauwkeurigheid van 0.4 mas. Wat betekent dit voor het aantal sterren dat we meten bij een gegeven parallax? Bedenk hierbij hoe het aantal sterren per vierkante graad per afstandsbin zich vertaald in de meting. *Het aantal sterren neemt als functie van d dus toe als* $d^3$*. Uit de vorige vraag hebben we gezien dat de onzekerheid naar grotere afstanden veel groter is dan naar kleinere afstanden. Als bovendien het aantal sterren op grotere afstand veel groter is dan op kleine afstand dan betekent het dat er veel meer sterren door toevallige meetfouten je gemeten 'bin' inscatteren van de hoge kant dan van de lage kant. Dit heet de Lutz-Kelker bias*

5. Als we nu één ster meten dichtbij de rand van onze meetnauwkeurigheid, zullen we dan over het algemeen zijn afstand onderschatten of overschatten?

   *Als we dus één specifieke ster meten uit een heel sample dan hebben we dus een grotere kans dat we zijn afstand onderschatten dan overschatten. het is daarom belangrijk om bij parallaxen altijd de foutenschatting in het parallaxdomein te blijven doen en pas op het allerlaatst naar afstanden te converteren.*

6. Laat zien dat vergelijking 2.6 uit het boek klopt.

   *Reken de eenheden om*

## 3 Galactische rotatie

De sterren in de schijf van onze Melkweg draaien om het centrum van de Melkweg. In tegenstelling tot wat je zou verwachten van een centraal gecondenseerd systeem (waarop de Melkweg in de lichtende materie lijkt), valt de rotatiesnelheid niet op een Keplerse manier af met de afstand vanaf het centrum (zoals bijvoorbeeld in het zonnestelsel). De rotatiecurve (het verloop van de rotatiesnelheid als functie van de afstand tot het centrum) loopt in de buurt van de Zon vlak, en heeft een waarde van ongeveer 200 km s$^{-1}$.

1. Als we aannemen dat alle sterren binnen 1 kpc van de Zon en in het vlak van de Melkweg dezelfde rotatiesnelheid om het Melkwegcentrum hebben als de Zon, en bovendien geen eigen peculiaire snelheid hebben (i.e. een afwijking bovenop de galactische rotatie), hoe verloopt dan de waargenomen eigenbeweging van deze sterren zich als functie van $l$, de galactische lengte, gezien vanaf de Zon.

   *Als alle sterren in de buurt van de Zon dezelfde rotatiesnelheid hebben ten opzichte van het Melkwegcentrum en geen eigen snelheden hier boven op, dan zien we sterren die recht tussen ons en het Melkwegcentrum liggen (l=0) gaan voorlopen op de Zon in hun baanbeweging (ze leggen in eenzelfde tijd eenzelfde koorde af, maar de totale omtrek van de cirkel is kleiner dan voor de Zon en dus gaan ze voorlopen). De sterren op l=90 houden dezelfde afstand tot de Zon, maar gaan door de kromming van de baan precies de andere kant op als sterren op l=0. Op l=180 gaan de sterren achterlopen, maar de richting* $\mu$ *is hetzelfde als op l=0. Op l=270 bewegen ze weer in dezelfde richting (gezien vanuit de Zon, niet vanuit het Melkwegcentrum) als op l=90.* $\mu$ *varieert dus met* $\cos(2l)$*. Zie Fig. 2.16.*

2. Wat is de maximale grootte van een eigenbeweging van een ster op afstand 500 pc ten gevolge van dit effect (en bij een afstand tot het Melkwegcentrum van 8.5 kpc voor de Zon)?

   *Op 500 pc afstand en l=0, is de afstand tot het GC nog maar 8kpc. De omtrek van de Zonsbaan is* $2\pi R_0$ = *53.4 kpc. Met een snelheid van 200 km/s = 6.28* $10^{12}$ *m/yr = 2.1e-4 pc/yr doet de Zon er dus 254 miljoen jaar over om een baantje af te leggen. Dat is 5.1 mas per jaar. Een ster op afstand 8 kpc met dezelfde baansnelheid doet er 239 Myr over om rond te gaan. dat is per jaar dus 5.4 mas per jaar. Het verschil is wat wij zien als eigenbeweging: 0.3 mas per jaar.*