Werkcollege 4, Sterrenstelsels, 2008

1 Evolutie van de Magellaanse wolken.

Uit metingen aan Supernovae 1987 A hebben we kunnen afleiden dat de afstand tot de Grote Magellaanse wolk (LMC) ongeveer 50 kpc is (t.o.v. het centrum van de Melkweg). De omlooptijd van de LMC in zijn baan rond ons Melkwegstelsel is ongeveer 2 Gyr.

1. Wat betekent dit voor de totale hoeveelheid massa binnen de baan van de LMC? Vergelijk dit met de totale hoeveelheid massa die we afgeleid hebben uit de zichtbare materie in de Melkweg. Wat betekent dit voor de hoeveelheid donkere materie binnen de baan van de LMC en de verhouding donker/licht voor de Melkweg?

   D_{LMC} = 50 kpc, dus $v_{LMC} = \frac{2\pi D_{LMC}}{P}$ = 0.15 pc yr^{-1} = 154 km s^{-1}. De massa M binnen een bepaalde straal wordt gegeven door:

   $$\frac{v^2}{D} = \frac{GM}{D^2} \rightarrow M = \frac{v^2 D}{G}, \tag{1}$$

   en met bovenstaande snelheid wordt dat: M = 5.51 10^{41} kg = 2.8 10^{11} M$_\odot$. In hoofdstuk 1 hebben we gezien dat de totale massa in sterren ongeveer 8 10^{10} M$_\odot$ is. Er is dus minimaal 3.5 keer zo veel massa in donkere materie dan in lichtende materie.

2. Om de afstand tot de LMC beter te kunnen meten zouden we graag de eigenbeweging van de LMC willen meten. Wat is de eigenbeweging van de LMC t.o.v. de Melkweg? Als we dit willen meten, waar moeten we de sterren in de LMC dan mee vergelijken? Levert dit praktische problemen op?

   We hebben net gezien dat de beweging van de LMC 0.15 pc yr^{-1} is. Op een afstand van 50 kpc is dat dus een hoek (0.15/50 000) rad = 0.6 boogseconde. De meting moet gedaan worden ten opzichte van verstaande quasars. Het is daarom belangrijk om quasars achter de LMC te vinden. Het praktische probleem is dus dat we **door** *de LMC heen moeten kijken!*

3. Wat is de ontsnappingssnelheid van de LMC, om weg te komen uit de zwaartekrachtsaantrekking van de Melkweg? Beschouw hier de LMC als een puntbron in het zwaartekrachtsveld van de Melkweg, en de Melkweg zelf als een centraal gecondenseerde massa (i.e. ook een puntbron).

   De ontsnappingssnelheid is:

   $$v_{\rm esc} = \sqrt{\frac{2GM}{D}} = 218 kms^{-1} \tag{2}$$

4. De massa van de LMC zelf is ongeveer 2 10^{10} M$_\odot$. Als we dit voor het moment ook even als een puntbron beschouwen, wat is dan de ontsnappingsnelheid van de LMC zelf, als een ster op $\sim$8 kpc (ongeveer de straal van de LMC) afstand van het centrum staat. Is een ster die uit de LMC weet te ontsnappen automatische ook los van de Melkweg?

   Zelfde formule: $v_{esc} = 131 kms^{-1}$. Nee dus, je kunt uit de LMC ontsnappen, maar toch nog vast zitten in het zwaartekrachtsveld van de Melkweg.

5. Hoewel de LMC en de Melkweg zeker geen puntbronnen zijn, kunnen we het gezamelijke zwaartekrachtsveld wel in eerste orde als zodanig beschrijven. Dit leidt tot de *Roche potentiaal*:

   $$\Phi(x) = -\frac{G\mathcal{M}}{|D-x|} - \frac{Gm}{|x|} - \frac{\Omega^2}{2}(x - \frac{D\mathcal{M}}{\mathcal{M}+m})^2, \tag{3}$$

waarbij x gemeten wordt van het lichte object naar het zwaarste object, D de afstand is tussen de twee objecten, m het lichtste object is en $\mathcal{M}$ het zwaarste.

De *Roche potentiaal* wordt gekenmerkt door een aantal lokale minima. Drie hiervan liggen op de lijn die de twee objecten met elkaar verbinden: L_1, L_2 en L_3, de eerste drie Lagrangiaanse punten, waarbij L_1 tussen de twee objecten ligt en L_2 achter het lichtste object en L_3 achter het zwaarste. Voor extreme massa-verhoudingen liggen L_1 en L_2 ongeveer even ver van het lichtste object af:

$$x = \pm r_J = D(\frac{m}{3\mathcal{M}+m})^{1/3}. \tag{4}$$

Wat is r_J voor de Magellaanse wolken, gebruikmakend van bovenstaande gegevens? Aangezien op deze punten de effectieve zwaartekracht nul is, zijn dit de plekken waar sterren ontsnappen aan hun sterrenstelsel. Dit leidt tot een 'verdamping' van de sterrenstelsels. In de LMC zien we dit als een getijdestroom die zich tot heel ver achter het stelsel uitstrekt.

Invullen van de getallen geeft:

$$r_J = 50kpc(\frac{2\,10^{10}}{3(2.8\,10^{11}) + 0.2\,10^{11})})^{1/3} = 14.3kpc. \tag{5}$$

6. Het effect van de Roche potentiaal is een verdieping van de potentiaal op een gegeven punt in de LMC. Sterren in de LMC zijn immers aan de gezamelijke potentiaal van de LMC en de Melkweg gebonden. Stel dat we voor de LMC een object nemen op $x = 0.5r_J$. Wat is de ontsnappingsnelheid van dit object als we de LMC in isolatie zouden beschouwen en wat als we de Roche potentiaal met de Melkweg toepassen? Vergelijk de twee getallen met elkaar.

   Als we de LMC in isolatie beschouwen krijgen we (zie boven) v_e = 155 km s^{-1}, met r = 7.15 kpc. De ontsnappingssnelheid is

$$v_e^2 = -2\Phi(x) = 2(\frac{G\mathcal{M}}{|D-x|} - \frac{Gm}{|x|} - \frac{\Omega^2}{2}(x - \frac{D\mathcal{M}}{\mathcal{M}+m})^2) \tag{6}$$

   in de Roche potentiaal. Hierbij is $x = r_J/2$ en $\Omega^2 = \frac{G(\mathcal{M}+m)}{D^3}$ (3e wet van Kepler).

   Ik gebruik hier even $\mathcal{M} = K$, anders wordt het vreselijk verwarrend. Stel $(\frac{m}{3K+m})^{1/3} = y$. In vullen van: $x = \frac{D}{2}y$ en $\Omega^2 = \frac{G(K+m)}{D^3}$) leidt (helaas) tot een draak van een vergelijking:

$$v = (\frac{2G}{D}(\frac{K}{1-\frac{1}{2}y} + 2\frac{m}{y} + \frac{K+M}{4}y^2 - Ky + \frac{K^2}{(K+m)}))^{1/2} \tag{7}$$

   Als je de getallen allemaal goed invult, kom je op een ontsnappingsnelheid uit van 310 km s^{-1}, dat is dus het dubbele van de bovenberekende waarde voor als de LMC in isolatie zou zijn.

7. De baan van de LMC rond de Melkweg is aan het krimpen door *dynamische wrijving*: het feit dat een zwaar object zoals de LMC zich, in een baan rond de Melkweg, beweegt door een massa-veld met een bepaalde dichtheid ρ. Door zwaartekrachtsinvloeden wordt het zware object afgeremd in zijn baan. Een volledige beschrijving van dynamische wrijving is verre van triviaal[1].

   Een versimpelde formulering van *dynamische frictie* geeft deze als:

$$F_{\rm dyn} = -C\frac{G^2 M_{LMC}^2 \rho}{v_{LMC}^2} \tag{8}$$

[1] Zie Chandrasekhar S., 1943, ApJ 97, 255 & ApJ 97, 263 & ApJ 98, 54

De massa komt hier tot het kwadraat in omdat het zowel een gravitationale interactie met het gas er om heen heeft (één term M) als één term M vanwege het feit dat een zwaarder object meer massa aan zal trekken. C is een constante die afhangt van de verhouding tussen het zware object en de snelheidsdispersie van het gas waardoor het heen beweegt. De LMC beweegt door de donkere materie halo van de Melkweg.

Laat zien bovenstaande vergelijking ook geschreven kan worden als:

$$a_{\mathrm{dyn}} = -C' \frac{GM_{LMC}}{D^2}, \tag{9}$$

met C' een andere constante, waarvan blijkt dat hij ongeveer $4.7 \cdot 10^{-4}$ is (als alles in SI eenheden wordt uitgedrukt), en D als boven de afstand tot de LMC.

Schrijf deze formule om door te gebruiken dat $v^2 = \frac{GM_{\mathrm{MW}}}{D}$ *en* $\rho \propto \frac{M_{MW}}{D^3}$*. De termen met de massa van de Melkweg vallen eruit.*

8. Wat is de kracht op de LMC vanwege dynamische frictie? Hoeveel verandert dus de snelheid van de LMC hierdoor? Wat is de tijdschaal voor inval van de LMC (en dus de tijd tot een merger met de Melkweg)? Vergelijk dit met de leeftijd van de Melkweg en het Heelal.

   Aannemende dat C' *= 4.7 10*$^{-4}$*,* $M_{\mathrm{LMC}} = 2\,10^{10} M_\odot$ *en* D *= 50 kpc, krijgen we dat* $a = Mdv/dt = 5.32\,10^{-16} m/s^2$*. De tijdschaal voor inval van de LMC is dus:* $\tau_{\mathrm{inval}} = v/a$ *∼9 Gyr.*